

三角形网格模型顶点曲率的求解算法*

刘仕庆, 陈幼平, 袁楚明, 周祖德

(华中科技大学 国家数控系统工程研究中心, 湖北 武汉 430074)

摘要: 推导了一般三角形网格模型顶点的平均曲率、高斯曲率和主曲率的计算方法, 考虑到经常遇到粗糙三角形网格模型, 为提高其曲率计算方法的精度, 结合 Loop 细分曲面算法, 进一步拓展了该曲率计算方法。该算法用于具有特征保持的网格模型简化取得了良好的效果。

关键词: 平均曲率; 高斯曲率; 主曲率; 网格简化; 虚拟现实

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1001-3695(2007)06-0107-02

Approach of Solving Vertex Curvature for Triangular Mesh Model

LIU Shi-qing, CHEN You-ping, YUAN Chu-ming, ZHOU Zu-de

(National Research Center of NC Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The approach of solving mean curvature, Gaussian curvature and principal curvatures of general triangular mesh model was derived. Considering coarse triangular mesh model is often seen, in order to increase the precision of curvatures, combined with Loop subdivision algorithm, the curvature algorithm was further extended. The application of the curvature solution to feature-preserved mesh simplification shows good result.

Key words: mean curvature; gaussian curvature; principal curvature; mesh simplification; virtual reality

在计算机图形学、图像分析处理和几何建模等研究领域中, 如自由曲面、反求工程、图像识别、三维医疗图像重构, 以及人脸识别等, 经常需要计算主曲率、平均曲率和高斯曲率等值, 用于折痕、棱边、隆起、沟壑等关键特征的提取、噪声的过滤和曲面的修补等, 因此曲率计算受到了广泛关注。对于曲面, 目前已经有多种数字计算方法, 这些方法基本上是基于参数化曲面^[1], 以隐函数^[2,3]或者四边形网格函数^[4,5]计算得到, 这些方法都十分复杂, 运算量很大。由于三角形网格计算简单, 并且可以通过硬件加速, 三角形网格模型在计算机图形学和几何建模中十分常用, 有必要建立一种能快速方便计算主曲率、平均曲率和高斯曲率的方法。图 1 中的部分关键特征, 就是通过曲率计算识别出来的。

1 网格描述及算法基本思想

1.1 网格描述

直观上, 三角形网格模型是由三维空间中的三角形通过边和顶点相互连接而成的分段线性曲面。其中每条边最多包含在两个三角形中。严格意义上, 网格是一个二元组 $M = (K, V)$ 。其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $v_i \in R^3$ 表示网格 M 中的顶点在空间中的位置, K 是一个单纯复形, 包含顶点集 $\{1, 2, \dots, m\}$ 及其非空子集, 一个单纯复形包含了一组单纯形, 特别地, 把 $\{i\} \in K, \{i, j\} \in K, \{i, j, k\} \in K$ 分别称作点、边和面^[6]。

1.2 曲线曲率的含义

要知道一条曲线在这一点上的弯曲程度, 只要知道多条曲线

在这一点上的曲率大小即可, 分析如下^[7]: 曲线 $r(s)$ 上任意一点, 有一个单位法向量 $N(s)$, 将 $N(s)$ 的起点平移到平面的原点, $N(s)$ 的终点就落到了单位圆周 S^1 (图 2), 这样就定义了一个映射 (Gauss 映射):

$$g: r(s) \rightarrow S^1, s \rightarrow N(s)$$

当 s 变化到 $s + \Delta s$ 时, 从下面泰勒展开式可以看出 Gauss 映射的变化。因为

$$N(s + \Delta s) = N(s) + N'(s) \Delta s + \dots = N(s) - k(s) t(s) \Delta s + \dots$$

所以, 当 s 变化时, $r(s)$ 的速度是 $|r'(s)| = 1$, 而 $N(s)$ 在 S^1 上转动的速度是 $|k(s)|$ 。从图 2 可以看出, 在 A ~ B 区间, $N(s)$ 的转动速度较快, $|k(s)|$ 较大, 因此比较弯曲; 而在 C ~ D 区间, $N(s)$ 的转动速度较慢, $|k(s)|$ 较小, 因此比较平坦。从上面的分析可见曲线曲率反映了曲线的弯曲程度。



图 1 三角形网格模型

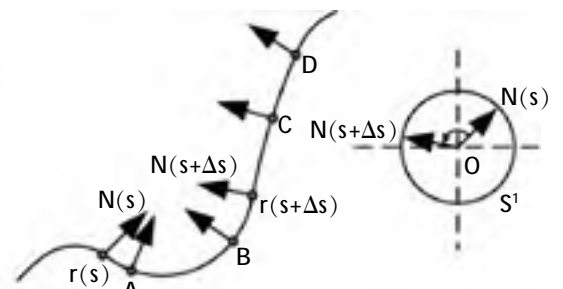


图 2 曲线曲率的几何意义

2 算法的具体描述

如图 3 所示, 与 v 相连的边为 $\overline{v_i} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, 过法向量 N_v 和边 $\overline{v_i}$ 构造一个平面 P , 设平面 P 与原光滑曲面相交所

收稿日期: 2006-04-16; 修返日期: 2006-06-06 基金项目: 湖北省国际科技合作资助项目(2005CA002)

作者简介: 刘仕庆(1972-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为数控技术、虚拟现实和增强现实、CAD/CAM(sinofreebird@163.com); 陈幼平(1957-), 男, 教授, 博导, 主要研究方向为数控技术、数字化设计与制造、虚拟现实和增强现实; 袁楚明(1964-), 男, 副教授, 主要研究方向为智能制造、数控技术、现代制造系统的监控与诊断; 周祖德(1946-), 男, 教授, 博导, 主要研究方向为数控的基本理论与技术、智能制造以及现代制造系统的可靠性与故障诊断。

得的曲线为 $r(s)$ 。一般地, 曲线 $r(s)$ 上任意一点, 有单位切向量 $T(s)$ 和单位法向量 $N(s)$, 则曲线 $r(s)$ 上任意一点都有沿曲线 $r(s)$ 的 Frenet 标架 $\{r(s); T(s); N(s)\}$, 则点 $v=r(s_v)$ 处的 Frenet 标架为 $\{r(s_v); T(s_v); N(s_v)\}$ 。由于网格模型不是连续曲面, 无法直接求得曲线 $r(s)$ 在顶点 v 处的曲率, 必须建立其近似求解方法。

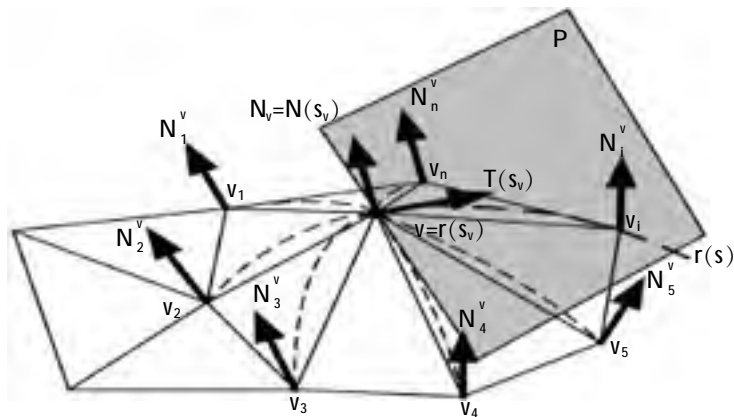


图3 曲率近似求解

首先求解三角形的法向量, 与 v 相关的每个三角形 $T_i^v = (v_i w_{(i+1) \bmod n})$ ($1 \leq i \leq n$) 的单位法向量可由下式求解:

$$N_i^v = ((v_i - v) \times (v_{(i+1) \bmod n} - v)) / ((v_i - v) \times (v_{(i+1) \bmod n} - v))$$

根据每个三角形的单位法向量和面积, 可以估算出顶点 v 处的法向量 N_v :

$$\bar{N}_v = (1/n \sum_{i=1}^n A_i^v) / \sum_{i=1}^n N_i^v A_i^v, N_v = \bar{N}_v / |\bar{N}_v|$$

其中, A_i^v 是与 v 相关的三角形 T_i^v 的面积。

将曲线 $r(s)$ 在 $s=s_v$ 处作泰勒展开:

$$r(s) = r(s_v) + r'(s_v)(s - s_v) + 1/2 r''(s_v)(s - s_v)^2 + \dots \quad (1)$$

对于曲线上任意一点, 由于 $|T| = 1, |N| = 1, T \cdot N = 0$, 经推导可得

$$d/ds \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

由式(2)确定的一个函数 $k(s)$ 就是曲线 $r(s)$ 的曲率, 令式(2)的 $s=s_v$, 联立式(1), 有

$$r(s) = r(s_v) + T(s_v)(s - s_v) + 1/2 k(s_v) N(s_v)(s - s_v)^2 + \dots \quad (3)$$

其中, $N(s_v) = N_v, N_v$ 就是前面求得的顶点 v 的法向量(图3), $k(s_v)$ 就是曲线 $r(s)$ 在顶点 v 处的曲率。

当网格比较致密, 三角形比较细小时, 取 $s = s_{v_i}$, 从 v 到 v_i 的弧长 $(s_{v_i} - s_v)$ 用边 $e_i = \bar{w}_i$ 的长度近似代替, 即 $s_{v_i} - s_v \approx \bar{w}_i$, 用 $N(s_v)$ 点乘式(3)两侧, 则有

$$k(s_v) \approx 2(N_v \times \bar{w}_i) / (\bar{w}_i)^2 \quad (4)$$

但是对于比较粗糙的网格, 从 v 到 v_i 的弧长 $(s_{v_i} - s_v)$ 和边长 \bar{w}_i 的差异已经较大, v_i 已经不落在 v 的邻域, 取 $s_{v_i} - s_v \approx \bar{w}_i$ 势必会造成较大误差的估算结果。为了进一步提高运算精度又不影响实时性, 采用 Loop 细分规则^[8], 边 w_i 之间分裂出一个新顶点(叫边顶点或 E 顶点), 再用新顶点取替 v_i 求解 $k(s_v)$ 。

图4是网格细分前后的两个网格, 逆向看, 可以将左侧网格看作是右侧网格的简化, 显然, 右侧网格更贴近原曲面, 其中新增的顶点就是 E 顶点。图5给出了 E 顶点的求解规则:

(1) 如图5(a)所示, 对每条内部边 w_i , 设共享此边的两个三角形分别为 $(w_i v_1)$ 和 $(w_i v_2)$, 则 $v_E = 3/8(v + v_i) + 1/8(v_1 + v_2)$ 。

(2) 如图5(b)所示, 边界边 E 顶点定义为 $v_E = 1/2(v + v_i)$ 。

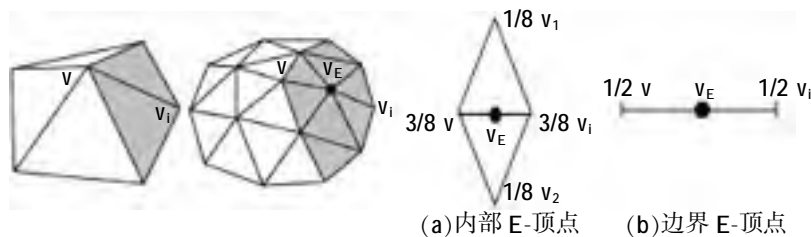


图4 网格模型的细分

图5 E-顶点的求解规则

将 v_E 取代 v_i , 求得

$$k(s_v) \approx 2(N_v \times \bar{w}_E) / (\bar{w}_E)^2 \quad (5)$$

这就是曲线 $r(s)$ 在顶点 v 处的曲率近似值, 虽然是曲线曲率, 但也反映了曲面在点 v 处沿单位向量 $T(s_v)$ 的弯曲程度。

考虑有向表面, 如图6所示, 对于网格上任一顶点 P , 设 T 和 N 分别为该点的切矢量和法矢量(请参照图3), 设 T_{max} 和 T_{min} 分别是该点处主曲率 k_{max} 和 k_{min} 的主方向, $k_n(\varphi)$ 是法截面曲线的曲率, 根据欧拉公式 $k_n(\varphi) = k_{max} \cos^2 \varphi + k_{min} \sin^2 \varphi$, 由微分几何知识可知:

$$\int_0^{2\pi} k_n(\varphi) d\varphi = (k_{max} + k_{min}) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi H \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} k_n(\varphi)^2 d\varphi = 3 \int_0^{2\pi} H^2 - 1/2 K d\varphi \quad (7)$$

其中, H 为平均曲率, $k = k_{max} \times k_{min}$ 是高斯曲率。通过式(6)(7)可以推导出三角形网格的平均曲率和高斯曲率。由梯形近似求积分公式和式(6)可得(图6)

$$H = 1/2 \int_0^{2\pi} k_n(\varphi) d\varphi \approx 1/2 [(k_1 + k_2) \int_0^{\varphi_1} d\varphi + (k_2 + k_3) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \dots + (k_m + k_1) \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} d\varphi] \quad (8)$$

其中, k_1, k_2, \dots, k_m 根据网格模型的粗糙程度由式(4)或(5)求得。同样的方法, 由式(7)可以求解出高斯曲率 K , 主曲率 k_{max} 和 k_{min} 也就得到

$$k_{max} = H + \sqrt{H^2 - K}, k_{min} = H - \sqrt{H^2 - K}$$

3 应用举例

网格模型是对曲面的逼近, 对于较平坦的区域, 部分三角形可以删除, 以减少三角形总数; 但对于棱边、棱角和边界等能充分反映模型特征信息和尺寸的区域, 曲面起伏较大, 则希望保留更多细节, 也就是三角形应该密集分布的地方。该区域的三角形应推迟删除或不删除。也就是说, 可以根据曲面各个区域的起伏情况来删减三角形。

利用前面得到的曲率公式, 根据曲率的大小, 很容易判断出网格模型的关键特征。现代三维扫描设备得到的三维模型往往由几万个, 甚至上百万个三角片组成, 而计算机性能有限, 因此庞大的数据给后续的显示、存储和处理等带来了很大的困难, 对于实时显示要求较高的场合, 如虚拟现实和增强现实, 过多的面片会导致渲染速度过慢, 严重影响了沉浸效果, 有必要在满足精度的情况下, 尽量减少面片的数量。由于关键特征对于保持模型的外观形状, 保证良好的视觉效果显得十分重要, 利用曲率能很好反映关键特征这一特点, 建立基于曲率的边折叠^[6]代价函数, 由代价函数来指导边折叠顺序, 推迟与关键特征相关的边的折叠, 也就推迟了与关键特征相关的三角片的删减, 起到了既能减少三角片总数, 又能保持关键特征的效果。基于曲率的网格模型简化算法与本文的主题无关, 在此不作具体介绍。图7就是基于曲率的网格模型的简化(下转第111页)

用插值法产生另外两个角度。 $A2 = A1 + \alpha_1(A3 - A1)$, $A4 = A3 + \alpha_2(A5 - A3)$ 。其中 α_1 、 α_2 是比例因子, 随机取值范围 $[0, 1]$, 为了避免两角靠得太近, 其取值应根据临床需要可调, 如取 $[0.2, 0.8]$ 等。遗传算法的本质是对模式进行一系列的运算, 即通过选择算子将当前群体中的优良模式遗传到下一代群体中, 通过交叉算子进行模式重组, 通过变异算子进行模式突变。通过这些运算, 较差的模式逐渐被淘汰, 较好的模式逐渐被遗传和进化, 最终可得到问题的最优解。根据临床经验, 首先引入优良模式, 大大节省了 SGA 寻找所引入的优良模式的时间, 这样就大大减少了计算时间。通过这样的处理, 将遗传算法与医生的经验知识集成到一起, 可提高遗传算法运行的效率和求解质量。

| | | | | |
|----|----|-----|----|-----|
| 0 | * | 110 | * | 250 |
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |

图2 特定肿瘤人工优良模式

2 程序设计

综上所述, 给出逆向调强适形放射治疗计划中机架角选择的算法程序流程图(图3)。据此又可设计出相应的处理程序。

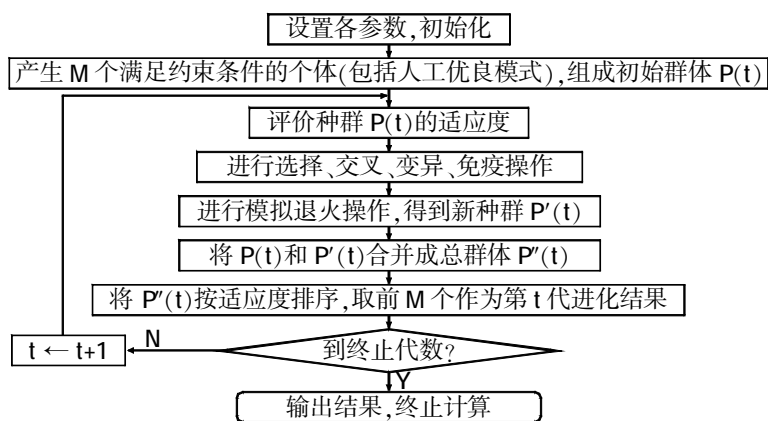


图3 IMRT 机架角选择的算法程序流程图

(上接第 108 页) 效果。可以看出, 在对网格模型大幅度简化后, 所有关键特征均较好地保持下来, 如三条凹槽没有粘连, 轴孔依然是圆形, 边缘凸出。

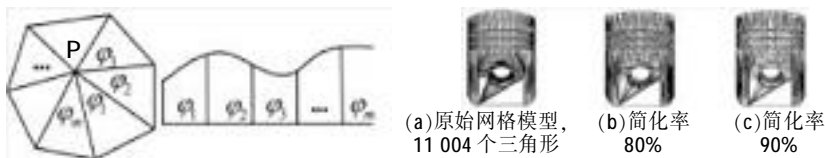


图6 求解顶点 P 曲率的示意图 图7 活塞网格模型的简化效果

4 结束语

本文给出了三角形网格模型的曲率计算公式, 为了提高粗糙网格模型曲率的计算精度, 结合网格模型的细分算法, 进一步给出了粗糙网格模型的曲率计算公式。其计算方便、运算速度快。作为例子, 简要介绍了曲率在具有特征保持特性的网格模型简化上的应用。

参考文献:

- [1] ARTMANN E. On the curvature of curves and surfaces defined by normal forms[J]. Computer Aided Geometry, 1999, 16(5): 355-376.
- [2] BELYAEV A G, PASKO A A, KUNII T L. Ridges and ravines on implicit surfaces: proc. of Computer Graphics International[C]. Ger-

3 结束语

根据临床知识及多年适形计划设计经验, 提出人工优良模式, 并把模拟退火算法引入作为一个算子, 为庞大的逆向调强适形治疗计划的设计、开发和完善提供参考。在 IMRT 计划设计中, 要求靶区剂量适形度高、均匀性好, 同时要求保护好危及器官。这一矛盾的解决需要选择合适射野物理参数, 如能量、机架角、机架角数、每一机架角的子野数、子野形状、每个子野的 MU 数等。这些都需要融入生物、物理、临床的最新知识。因此 IMRT 软件的编制、完善, 不但要注意把医生、物理师临床知识、经验融入到一个具体的计划中来, 而且应加强软件的自适应或学习能力、更新人的最新知识等。这些问题有待于进一步探索、研究。

参考文献:

- [1] 胡逸明, 张红志, 戴建荣. 肿瘤放射物理学[M]. 北京: 原子能出版社, 1999: 538-572.
- [2] 胡逸民. 调强适形放射治疗: 第一届全国 IMRT/SRT 研讨会讲义[C]. 北京: 中华医学会放射肿瘤学分会, 2005: 52-59.
- [3] LI Yongjie, YAO Jonathan, YAO Dezhong. Automatic beam angle selection in IMRT planning using genetic algorithm[J]. Phys. Med. Biol. 2004, 49(10): 1915-1932.
- [4] 李承文, 马欢, 韩战钢. 随机性对遗传算法演化机制的影响[J]. 计算机应用研究, 2005, 22(6): 61-63.
- [5] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [6] 周丽, 黄素珍. 基于模拟退火的混合遗传算法研究[J]. 计算机应用研究, 2005, 22(9): 72-73.
- [7] LI Yongjie, YAO Jonathan, YAO Dezhong. Genetic algorithm based deliverable segments optimization for static intensity-modulated radiotherapy[J]. Phys. Med. Biol., 2003, 48(20): 3353-3374.
- [8] 张红志, 邱学军, 史荣. 肿瘤放射治疗物理学进展[M]. 北京: 北京医科大学出版社, 2002: 133-139.

many: [s. n.], 1998: 530-535.

- [3] BOGAEVSKI I A, LANG L, BELYAEV A G, et al. Color ridges on implicit polynomial surfaces[R]. [S. l.]: The University of Aizu, 1996.
- [4] GORDON G G. Face recognition from depth maps and surface curvature: proc. of SPIE[C]. USA: [s. n.], 1991: 263-270.
- [5] MONGA O, ARMANDE N, MONTESINOS P. Thin nets and crest lines: application to satellite data and medical images[J]. Computer Vision and Image Understanding: CVIU, 1997, 67(3): 285-295.
- [6] HOPPE H, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Mesh optimization: proc. of ACM SIGGRAPH[C]. USA: [s. n.], 1993: 19-26.
- [7] 彭家贵, 陈卿. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 17-19.
- [8] LOOP C. Smooth subdivision surfaces based on triangles[D]. [S. l.]: The University of Utah, 1987.
- [9] HOPPE H. Progressive meshes[EB/OL]. [1996]. <http://www.research.microsoft.com/research/graphics/hoppe/>.
- [10] HAMANN B. Curvature approximation for triangulated surfaces[J]. Springer Computing Supplementum Archive: Geometric Modelling Archive, 1993(8): 139-153.
- [11] STOKEYLY E, WU S Y. Surface parameterization and curvature measurement of arbitrary 3D-Objects[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(8): 833-840.