

大连理工大学
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

硕士学位论文

MASTERAL DISSERTATION



三角网格离散曲率估计和 Taubin 方法改进

学科专业 计算数学

作者姓名 齐宝明

指导教师 刘秀平 副教授

答辩日期 2008年6月10日

硕士学位论文

三角网格离散曲率估计和 Taubin 方法改进
**Curvatures Estimation and The Improvement of Taubin's
Method on Triangular Mesh**

作者姓名: 齐宝明

学科、专业: 计算数学

学 号: 20601032

指导教师: 刘秀平副教授

完成日期: 2008年6月

大连理工大学

Dalian University of Technology

独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或者其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名： 齐宗明 日期： 2008.6.10

摘 要

曲率是曲面的重要不变量,是传统微分几何的重要基础。同样,三角网络的离散曲率也是离散曲面上应用的基础和前提,例如网格曲面的特征提取,网格简化,网格光顺,网格变形,模型分块等。但是由于三角网络曲面是由离散点云以及点与点之间的拓扑关系定义的,缺少曲面确切的解析表示,所以不能采用微分几何的曲率公式。这样,三角网络曲面上离散曲率的各种估计方法应运而生。

目前,关于三角网络曲面上离散曲率估计的算法大概有 10 种,本文对各种方法给出了一个综述,详细地介绍了几种算法的理论背景,公式意义和适用范围。其中, Taubin 离散曲率估计方法由于其在时间和空间的线性,而占有重要的地位。他们描述了一种在三角网络上任意点估计曲率张量的方法。通过计算 3×3 对称矩阵的特征值和特征向量可以得出主曲率和主方向,而该对称矩阵是由积分公式定义并且与曲率张量的矩阵表达密切相关。

Taubin 离散曲率估计算法中要用到两个中间估计量:法向量和权值。Taubin 选择了面积加权的方法估计法向量,这样忽视了三角形片形状的影响。Sheng-Gwo Chen 等提出选择重心为权值来估计法向量和主曲率的方法。本文采用了面积质心夹角的三角网格顶点向量法和三角片质心权值来改进 Taubin 离散曲率估计方法,更好更准确地反应了三角片的形状。

本文选择参数曲面做了误差详细的比较。在椭球和环面上,证明了改进算法的优越性。无论是高斯曲率还是平均曲率在计算精度上都有了明显改善。最后,本文对实验误差进行了分析,得出曲率误差是和点的密度以及此点的曲面弯曲程度有着密切关系的。

关键词: 三角网格; 曲率; 平均曲率; 高斯曲率; 主曲率

Curvatures Estimation and The Improvement of Taubin's Method on Triangular Mesh

Abstract

Curvature is an important invariant of surface and the important foundation of differential geometry. At the same time, discrete curvature on triangular mesh is the foundation of many applications such as characteristic detecting on a polyhedral surface, smoothing, simplification, distortion and region decomposition. But the triangular mesh is defined by points cloud and topologic relation among the points, lack of definite analytic expression of surfaces, so the curvature formulas in differential geometry are not suitable for the discrete forms. So many discrete curvature estimation methods on triangular mesh appear.

So far, there are about 10 discrete curvature estimation methods on triangular. The paper presents a systematic of various kinds of discrete curvature estimation methods on triangular mesh. Then we introduce the theoretical background, the signification of formulas and the applied fields of several main methods in detail. Taubin's discrete curvature estimation methods plays an important role, which is linear in time and space. They described a method to estimate the tensor of curvature of a surface at the vertices of a triangular mesh. Principal curvatures and principal directions are obtained by computing in closed form the eigenvalues and eigenvectors of certain 3×3 symmetric matrices defined by integral formulas, and closely related to the matrix representation of the tensor of curvature.

Taubin's discrete curvature estimation methods uses two intermediate quantities: weight and normal vectors. Taubin estimated normal vectors with area weights, which neglected the effects of triangular shape. Sheng-Gwo Chen presented the method of normal vectors and curvatures with centroid weights. We adopt area, centroid and angle weighted triangle normal vectors calculation formula and triangle centroid weights to improve Taubin's discrete curvature estimation methods, which more exactly reflect the effects of triangular shape.

The paper provides particular comparison results of error on a parametric surface. It prove our method's advantage on the ellipsoid and torus. Compared with old Taubin's method, Gaussian and mean curvatures has its obvious advantage in exactitude. At last, we make an assay of errors. Our conclusions are curvature errors have much to do with points density and bend level of surface at the point.

Key Words: Triangular mesh; Curvature; Mean curvature; Gaussian curvature; Principal curvature

目 录

摘 要	I
Abstract	III
引 言	1
1 三角网格曲面离散曲率估计问题起源	1
2 当前发展情况	1
3 本文主要工作	1
1 基本知识	3
1.1 光滑曲线曲面的相关基本知识	3
1.1.1 光滑曲线的基本知识	3
1.1.2 光滑曲面的基本知识	5
1.2 三角网格基本知识	10
2 离散曲率估计方法总结	13
2.1 Moreton 和 Sequin 的方法	13
2.2 Chen 和 Schmitt 的方法	14
2.3 Taubin 主曲率主方向的方法	15
2.4 Desbrun 等方法	15
2.5 Dyn 和 Hormann 的方法	16
2.6 Watanabe 和 Belyaev 的方法	18
2.7 Mayer 方法	18
2.8 Taubin 方法	19
2.9 Meyer 等的 Voronoi 方法	19
2.10 Cohen-Steiner 和 Morvan 的方法	22
本章小节	23
3 Taubin 主曲率主方向的方法及其改进	24
3.1 Taubin 主曲率估计方法的主要思想介绍	24
3.2 Taubin 主曲率估计方法的计算步骤	25
3.3 Taubin 主曲率估计方法的改进:	27
3.3.1 法向量的改进	27
3.3.2 权值的改进	28
4 实验	29
4.1 椭球	29

4.2 环面	31
4.3 误差分析	34
结 论	37
参 考 文 献	38
攻读硕士学位期间发表学术论文情况	40
致 谢	41
大连理工大学学位论文版权使用授权书	42

引 言

1 三角网格曲面离散曲率估计问题起源

一般来说,曲面的一阶微分量是指曲面的切平面方向和法向量,二阶微分量是指曲面的曲率等有关量。随着三维扫描技术的发展和逆向工程的兴起,三角网格曲面日益成为三维图形的一种通用表示方法,在计算机图形学,计算机辅助几何设计中的使用日益广泛。但是由于三角网格曲面是由离散点云以及点与点之间的拓扑关系定义的,缺少曲面确切的解析表示,所以不再适用传统的解析曲面的曲率计算方法。

众所周知,曲率是曲面曲线的重要不变量,是传统微分几何中的重要基础。同样,三角网格的离散曲率也是离散曲面上应用的基础和前提。例如网格变形[1],网格曲面的特征提取,网格光滑[2],网格简化[3],模型分块[4]等等。这样,三角网格曲面上离散曲率的各种估计方法应运而生。

2 当前发展情况

三角网格上离散曲率估计方法从 1992 年开始起,现在已经有了很多种算法。它们分别是利用四次 PDE 的 Moreton 和 Sequin 的方法[5],采用最小二乘的 Chen 和 Schmitt 的方法[6],利用张量分析和矩阵特征向量分析的 Taubin 主曲率主方向的方法[7],利用 Laplace-Beltrami 算子的 Desbrun 等方法[8]、Mayer 方法[9]和 Taubin 方法[10],利用 Normal cycle 理论计算曲面的第二基本形式的 Dyn 和 Hormann 的方法[11]、Cohen-Steiner 和 Morvan 的方法[12],利用法曲率积分的 Watanabe 和 Belyaev 的方法[13],利用 Voronoi 元和有限元的 Meyer 等的 Voronoi 方法[14]。

在离散曲率估计过程中,常需要估计一个中间量,就是顶点的法向量。顶点的法向量的估计也一直在不断发展更新,从最初 Henri Gouraud 的等加权平均[15],到角度权值[16]以及面积权值,而后 Max 给出的与角度和边长度相关的新权值[17], Sheng-Gwo Chen 等又提出选择点重心距离的平方倒数为权值[18]。

此外,还出现了不同算法比较的文章, Tatiana[19]对三角网格上高斯曲率和平均曲率不同的估计方法作比较, Shuangshuang Jin[20]等对三角网格上点法向量的不同估计方法进行了比较和分析。

3 本文主要工作

本文归纳概述了目前三角网格曲面上离散曲率估计算法。同时,本文采用了面积质心夹角的三角网格顶点向量法和三角片质心权值来改进 Taubin 离散曲率方法,更好更

准确地反应了三角片的形状，并且通过实验和原算法进行了计算精度的比较。最后对实验误差进行了分析。

文章在第一章介绍三角网格曲面曲率估计的基本知识，例如曲率相关的定理定义，三角网格模型相关基本知识等等。第二章中，总结了三角网格曲面上离散曲率估计算法。本文在第三章中介绍了 Taubin 离散曲率方法并且进行了改进。第四章中，本文通过实验证明了算法改进的优越性并对误差进行了分析。文章的最后，是本文的总结。

1 基本知识

微分几何学是运用数学分析的理论研究曲线或曲面在它一点邻域的性质, 换句话说, 微分几何是研究一般的曲线和曲面在“小范围”上的性质的数学分支学科。微分几何学以光滑曲线(曲面)作为研究对象, 所以整个微分几何学是由曲线的弧长、曲线上一点的切线等概念展开的。既然微分几何是研究一般曲线和一般曲面的有关性质, 则平面曲线在一点的曲率和空间的曲线在一点的曲率等, 就是微分几何中重要的讨论内容。经典微分几何主要研究曲线和曲面上每一点的局部微分特性, 包括每一点处的法向, 主法向, 主曲率, Gauss 曲率和平均曲率, 刻划了去面上每一点临近的一阶和二阶导数性质, 可以根据这些微分特性局部重建曲面。

1.1 光滑曲线曲面的相关基本知识

1.1.1 光滑曲线的基本知识

定义 曲线 $r: I=(a,b) \rightarrow E^2(E^3)$ 称为正则曲线, 如果:

(1) 曲线的每一个分量都是 C^∞ 函数,

(2) $\left| \frac{dr}{dt} \right| > 0, \forall t \in (a,b)$ 成立。[21]

考虑平面正则曲线 $r(t)=(x(t), y(t)), \forall t \in (a,b)$, 设 $[c,d] \subset (a,b)$, 曲线 $r(t)$ 的弧长为 $\int_c^d \left| r'(t) \right| dt$, 它是动点在时间间隔 $t=c$ 到 $t=d$ 之间的距离。固定初始时间 c , 以时间 t 代替 d , 可以得到 c 到 t 移动的距离 $s(t) = \int_c^t \left| r'(u) \right| du$ 。 $s(t)$ 是 t 的函数。这时 t 就可以表示为 s 的函数 $t=t(s)$ 。曲线 r 关于新参数 s 的表示 $r(s) = r(x(s), y(s)) = r(x(t(s)), y(t(s)))$, 称 s 为曲线的弧长参数。

设 $\alpha: I=(a,b) \rightarrow R^3$ 是一条弧长为参数的曲线。由于切向量 $\alpha'(s)$ 具有单位长度, 从而二阶导数的范数 $|\alpha''(s)|$, 度量了邻近切线与 s 点切线的交角的变化率。因此 $|\alpha''(s)|$ 表示在点 s 的一个邻域中, 曲线以怎样的速率离开 s 点的切线, 如图 1.1。所以有下面的定义。

定义: 设 $\alpha: I=(a,b) \rightarrow R^3$ 是以弧长为参数的曲线, $s \in I$, 则范数 $|\alpha''(s)| = k(s)$ 称为 α 在点 s 的曲率。[22]

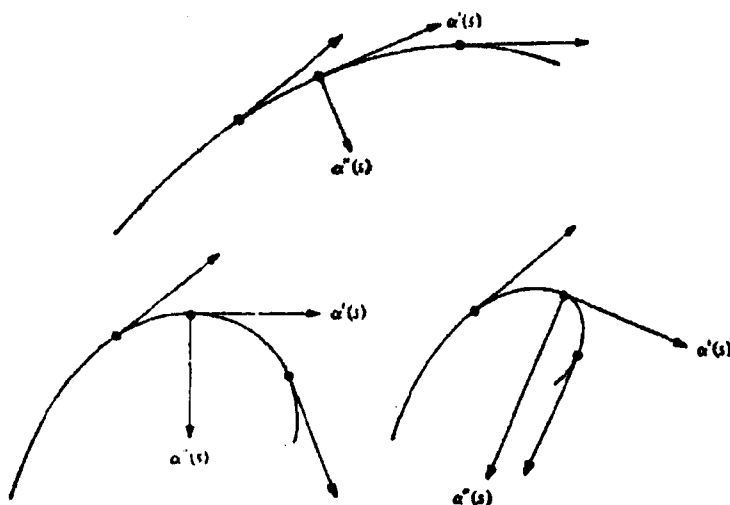


图 1.1

Fig.1.1

$t(s) = \dot{r}(s)$ 是 r 的单位切向量, 与 $t(s)$ 垂直的向量称为曲线在该点的法向量。当 $k(s) > 0$ 时, 由 $\dot{r}(s)$ 决定的一个单位向量 $n(s) = \frac{1}{k(s)} \dot{t}(s)$ 与 $t(s)$ 同向。称 n 是曲线 r 的主法向量。 $t(s)$ 和 $n(s)$ 是以 $r(s)$ 为起点的相正交的单位向量, 令 $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, $b(s)$ 称为曲线 r 的副法向量, 这样就有曲线 r 的一个正交标架 $\{r(s); t(s), n(s), b(s)\}$ 称为曲线的 Frenet 标架。我们还可以得到 Frenet 公式:

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = k(s)n(s) \\ \dot{n}(s) = -k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ \dot{b}(s) = -\tau(s)n(s) \end{cases}$$

其中函数 $\tau(s)$ 称为曲线 r 的挠率。

性质: 曲线的弧长, 曲率和挠率在刚体运动下不变。

1.1.2 光滑曲面的基本知识

这里指的曲面一般是正则曲面。关于正则曲面，粗糙地说， R^3 中的一张正则曲面是取一些平面通过变形和适当安排而得，使所产生的图形没有尖点，没有边，也不自身相交，以致图形的每一个点上切平面是有意义的。确切定义如下。

定义：子集 $S \subset R^3$ 是一张正则曲面，如果对每个点 $p \in S$ 存在一个邻域 $V \subset R^3$ 和一个开集 $U \subset R^2$ 到 $V \cap S \subset R^3$ 上的映照 $X:U \rightarrow V \cap S$ 满足下列条件（图 1.2）：

1. X 是可微的。
2. X 是同胚映照。
3. (正则性条件) 对任何 $q \in V$ ，微分映照 $dX_q:R^2 \rightarrow R^3$ 是1-1的。

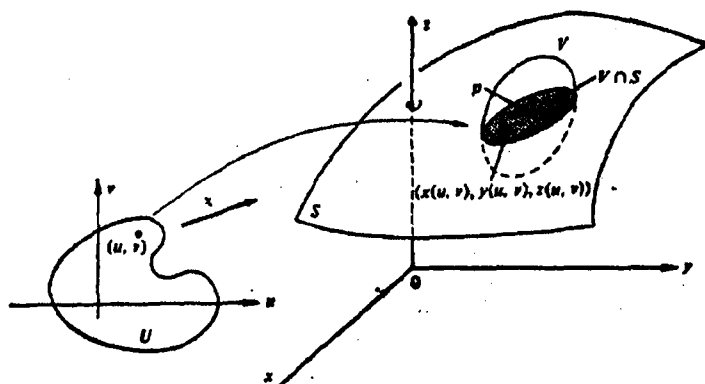


图 1.2
Fig. 1.2

从平面区域 $D=(u,v)$ 到 E^3 的映射 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 满足：每个分量函数是无限阶可微；当 $r_u(u,v) \times r_v(u,v) \neq 0$ 时，称 $r(u,v)$ 是 E^3 的曲面， (u,v) 是曲面的坐标参数。法向量 N 是垂直于曲面的一个单位向量， $N(u,v) = \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|}$ ，其中，

$$r_u(u,v) = \frac{\partial r(u,v)}{\partial u}, \quad r_v(u,v) = \frac{\partial r(u,v)}{\partial v}.$$

曲面的形状可以由参数 E, F, G, L, M, N 来刻画，它们分别称为曲面的第一和第二基本形式。

第一基本形式为： $\langle dr, dr \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

第二基本形式为： $-\langle dr, dN \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

其中， $E = \langle r_u(u,v), r_u(u,v) \rangle$, $F = \langle r_u(u,v), r_v(u,v) \rangle$, $G = \langle r_v(u,v), r_v(u,v) \rangle$

$$L = -\langle r_u(u, v), N_u(u, v) \rangle, \quad M = -\langle r_u(u, v), N_v(u, v) \rangle, \quad N = -\langle r_v(u, v), N_v(u, v) \rangle$$

对于曲面来说, 曲率向量 $\frac{d^2r}{ds^2}$ 一般不再是曲面的切向量。所以将 $\frac{d^2r}{ds^2}$ 分解为曲面的切向量和法向量两部分。考虑曲率向量沿曲面的法向部分:

$$k_n = \left\langle \frac{d^2r}{ds^2}, n \right\rangle \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = r_u \frac{d^2u}{ds^2} + r_v \frac{d^2v}{ds^2} + r_{uu} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2r_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + r_{vv} \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds}$$

$$\text{所以, } k_n = \langle r_{uu}, n \rangle \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2 \langle r_{uv}, n \rangle \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \langle r_{vv}, n \rangle \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds}$$

$$\text{这样, 可以得到 } k_n = L \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds} \quad (1.2)$$

曲面 S 沿非零切向量 $w = \xi r_u + \eta r_v$ 的法曲率定义为:

$$k_n(w) = \frac{\Pi(w, w)}{I(w, w)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \quad (1.3)$$

直观地说, 曲面沿一个方向的法曲率可视作曲面沿那个方向的弯曲程度。

Meusnier 定理: 曲面 S 上过给定点 $p \in S$ 的所有曲线, 在 p 点处沿着相同的切线方向有相同的法曲率。

所以, 我们可以说在曲面 S 上点 p 处沿着某一方向的法曲率。实际上, 对于曲面 S 上点 p 处, 沿着每一个切方向对应一个法曲率, 点 p 处便有一组法曲率的集合。这些法曲率中, 最大的法曲率 k_1 和最小的法曲率 k_2 称为主曲率, 其对应的方向 T_1, T_2 称为在点 p 处的主方向。

知道了主曲率的定义, 可以容易的计算点 p 处任意方向的法曲率 k_n , 也就是著名的 Euler 公式:

设 T 是点 p 处的单位切向量, $\{T_1, T_2\}$ 是点 p 处切平面的正交标准基, 有 $T = \cos(\theta)T_1 + \sin(\theta)T_2$, 则沿着切方向 T 的法曲率 k_n 可以表示为:

$$k_n = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta) \quad (1.4)$$

这样定义平均曲率 k_H 为法曲率 k_n 的平均: $k_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta$ 。由 Euler 公式, 主曲率 k_1, k_2 与法曲率 k_n 的关系, 推导出著名的平均曲率定义: $k_H = (k_1 + k_2)/2$ 。高斯曲

率定义为两个主曲率的乘积 $k_G = k_1 \cdot k_2$ 。高斯曲率反映了曲面的局部弯曲程度。下面介绍与高斯曲率密切相关的 Gauss 映照。

设 $S \subset R^3$ 是具有定向 N 的正则曲面。映照 $N : S \rightarrow R^3$ 取值于单位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; |x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ，这样得到的映照 $N : S \rightarrow S^2$ 称为 S 的 Gauss 映照 (图 1.3)。

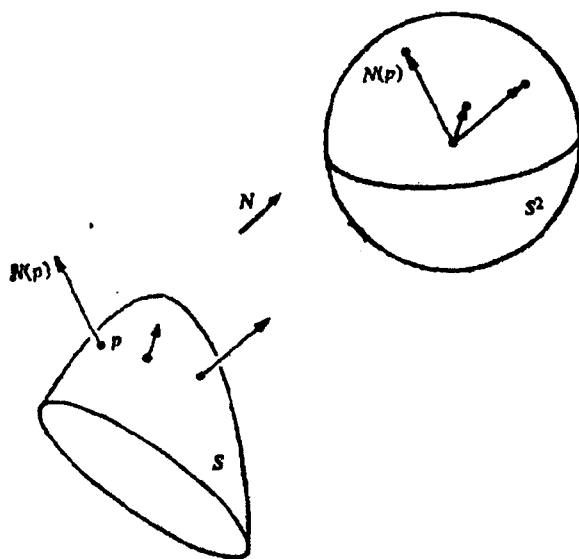


图 1.3

Fig.1.3

利用 Gauss 映照 $N : S \rightarrow S^2$ ，就可以给出高斯曲率的几何解释。设 p 是曲面 S 上的一点，且高斯曲率 $k_G(p) \neq 0$ ， V 是 p 的一个连通邻域，且在其中不改变符号，则

$$k_G(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} \quad (1.5)$$

其中 A 是 V 中包含 p 点的一个区域 B 的面积， A' 是 B 经 Gauss 映照 $N : S \rightarrow S^2$ 的像的面积。极限是对收敛于 p 点的一个区域序列 B_n 取的，其意义是，对包含 p 点的任意一个球，所有的 B_n 必包含在这个球内，只要 n 充分大。

有了 Gauss 映照可以导出 Weingarten 变换。这样从著名的 Weingarten 方程出发, 我们可以计算任意正则点的主曲率, 两个主曲率 k_1 和 k_2 为该方程的两个根。Weingarten 方程的一次项系数和常数项都是关于曲面第一和第二基本形式的函数, 方程如下:

$$k^2 - \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$$

$$\text{则平均曲率 } k_H = (k_1 + k_2)/2 = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}, \text{ 高斯曲率 } k_G = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

高斯曲率 k_G 和平均曲率 k_H 都反映着曲面的几何局部特征。Lagrange 注意到 $k_H = 0$ 是对于极小曲面的 Lagrange 方程, 提供了一个极小曲面与平均曲率流形的直接关系:

$$2k_H n = \lim_{\text{diam}(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A} \quad (1.6)$$

其中, A 是点 p 处无穷小的区域面积, $\text{diam}(A)$ 是它的直径, ∇ 是关于点 $p(x, y, z)$ 坐标的梯度。因此, 我们定义算子 K , 是曲面上点 p 到向量的映射 $K(p) = 2k_H(p)n(p)$, K 是著名的 Laplace-Beltrami 算子。

如果知道了两个离散主曲率 k_1, k_2 可以表示为离散高斯曲率 k_G 和离散平均曲率 k_H 的函数, 表示为:

$$k_1(v_i) = k_H(v_i) + \sqrt{k_H^2(v_i) - k_G(v_i)} \quad (1.7)$$

$$k_2(v_i) = k_H(v_i) - \sqrt{k_H^2(v_i) - k_G(v_i)} \quad (1.8)$$

下面来介绍微分几何中的一个重要定理, 即 Gauss-Bonnet 定理。

Gauss 定理: 曲面的高斯曲率在局部等距对应下保持不变。

Gauss-Bonnet 定理是曲面微分几何中最深刻的定理。这个定理的最初形式是 Gauss 在一篇著名的讨论曲面上测地三角形 (即其三边均为测地弧) 的文章中叙述过。大体上说, 一个测地三角形 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之和超过 π 的部分等于 Gauss 曲率 k_G 在

$\triangle ABC$ 上的积分 (图 1.4), 也就是说, $\sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi = \iint_{\triangle ABC} k_G dA$

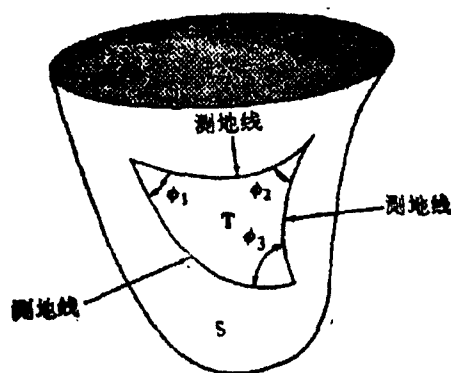


图1.4

Fig.1.4

Gauss-Bonnet定理(局部): 设 $x:U \rightarrow S$ 是定向曲面 S 的一个正交参量表示, 其中 $U \subset R^2$ 同胚于开圆盘, 而 X 与 S 的定向相容. $R \subset x(U)$ 是 S 的一个简单区域并设 $a:I \rightarrow S$ 使得 $\partial R = a(I)$. 假定 a 是正定向的并以弧长 s 作参数, 而且设 $a(s_0), \dots, a(s_k)$ 和 $\theta_0, \dots, \theta_k$, 分别为 a 的顶点及外角. 则

$$\sum_{i=0}^k \theta_i + \sum_{i=0}^k \int_{S_i}^{S_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K dA = 2\pi \quad (1.9)$$

其中 $k_g(s)$ 是 a 的正则弧的测地曲率, K 是 S 的 Gauss 曲率.

这样就有: 设 $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ 是曲面 S 上的一条逐段光滑简单闭曲线, 而这些光滑曲线段在交接处的外角为 ε_i , 且 C 围成曲面上的一个单连通区域 D . 那么成立

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} k_g ds + \iint_D k_G dA = 2\pi \quad (1.10)$$

推论: 如果曲线 C 中每段光滑曲线 C_i 是测地线, 则在由测地线段所围成的单连通测地 n 边形区域 D 中, 就有如下的公式:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \iint_D k_G dA = 2\pi \quad (1.11)$$

如果用 θ_i 表示测地 n 边形外角 ε_i 所对应的内角, 则有

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = (n-2)\pi + \iint_D k_G dA \quad (1.12)$$

整体 Gauss-Bonnet 定理 设 $R \subset S$ 是一定向曲面的正则区域。令 O_1, \dots, O_n 是分段正则的简单闭曲线并组成 R 的边界 ∂R 。设每个 O_i 是正定向的并设 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 是曲线 O_1, \dots, O_n 的全部外角。则

$$\sum_{i=1}^p \theta_i + \sum_{i=1}^n \int_{O_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma = 2\pi\chi(R) \quad (1.13)$$

其中 S 为 O_i 的弧长, 在 O_i 上的积分表示在 O_i 的每段正则弧上的积分之和。

1.2 三角网格基本知识

由于离散曲率的估计是基于三角网格模型的, 所以下面我们就来介绍一个三角网格的基本知识。

三角网格模型一般情况下可以由一对线性表表示, $M=(V,F)$; 其中 $V = \{v_i : 1 \leq i \leq n_v\}$ 表示顶点集, $F = \{f_k : 1 \leq k \leq n_f\}$ 表示三角片集。图 1.5 是就是一个三角网格模型。

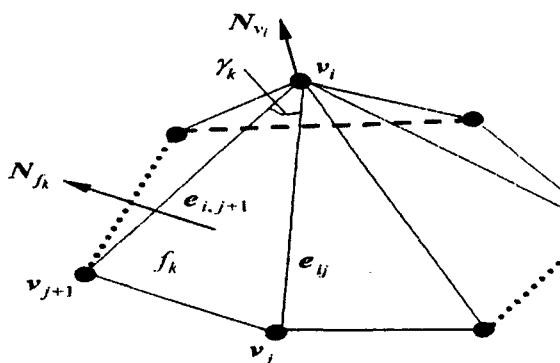


图 1.5 三角网格模型

Fig1.5 The triangular mesh

三角片 f_k 的法向量 N_{f_k} 的计算式如下:

$$\begin{aligned} N_{f_k} &= e_{ij+1} \times e_{ij} / \| e_{ij+1} \times e_{ij} \| \\ &= (v_i - v_{j+1}) \times (v_i - v_j) / \| (v_i - v_{j+1}) \times (v_i - v_j) \| \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中, e_{ij+1} 表示由顶点 v_{j+1} 指向顶点 v_i 的边向量; e_{ij} 表示由顶点 v_j 指向 v_i 的边向量。

我们称 1-环邻域是与点 v_i 相邻的三角形集合。图中除顶点 v_i 外的其他顶点组成的集合记为 V^i 。如果顶点 v_j 属于 V^i , 则 v_j 是 v_i 的相邻点。 V^i 中顶点个数称为其顶点的度,

记为 $|N(i)|$ 。包含 v_i 的三角形片集合记为 F^i 。如果三角形片记 f_k 属于 F^i ，记为 $f_k \in F^i$ ，记 $|f_k|$ 为三角形片的面积。包含点 v_i 的三角片的面积之和记为 $N(v_i)$ 。

离散三角网格上法向量和法曲率也有一般的定义方法，这些几何量估算的准确度对高斯曲率和平均曲率的准确度影响很大。对于离散三角网格曲面 $M=(V,F)$ ，任意点 v_i 的法向量一般可定义为1-环三角形某些几何量的加权和。最简单的加权方法为1-环三角形的法向量平均值，定义如下：

$$N_{v_i} = \frac{1}{|N(i)|} \sum_{f_k \in F^i} N_{f_k} \quad (1.15)$$

Taubin(1995)给出的面积加权和的定义：

$$N_{v_i} = \frac{\sum_{f_k \in F^i} |f_k| N_{f_k}}{\left\| \sum_{f_k \in F^i} |f_k| N_{f_k} \right\|} \quad (1.16)$$

对于三角网格上任意点 v_i ，法曲率通常使用公式

$$k_{ij} = \frac{2 \langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2} \quad (1.17)$$

上述 k_{ij} 也是一种估计，估计过程如下：

对于单位向量 T ，是曲面 $r(u,v)$ 在点 p 的切方向，我们来估计沿着单位向量 T 的法曲率 $k_p(T)$ 。考虑弧长参数的光滑曲线 $\alpha(s)$ ， $\alpha(0)=p$ ， $\alpha'(0)=T$ ， $\alpha''(0)=k_p(T)N$

将 $\alpha(s)$ 做泰勒展开，则

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)s^2}{2!} + O(s^3) \\ &= p + T s + \frac{1}{2} k_p(T) N s^2 + O(s^3) \\ \alpha(s) - p &= T s + \frac{1}{2} k_p(T) N s^2 + O(s^3) \end{aligned}$$

对上式两端与 N 作内积，由于 $N \perp T$ ， $\langle N, T \rangle = 0$ ，则有

$$2 \langle N, \alpha(s) - p \rangle = k_p(T) s^2 + O(s^3)$$

又由泰勒展式得

$$\langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle = \langle Ts, Ts \rangle + O(s^3)$$

因此推出

$$\|\alpha(s) - p\|^2 = s^2 + O(s^3)$$

最后, 由等式得出

$$k_p(T) + O(s) = \frac{2\langle N, \alpha(s) - p \rangle}{\|\alpha(s) - p\|^2}$$

$$k_p(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\langle N, \alpha(s) - p \rangle}{\|\alpha(s) - p\|^2}$$

这样, 对于三角网格上当前点 v_i , 点 v_j 是点 v_i 一环邻域上的一点, 沿着切方向 T_j , 估计当前点 v_i 在方向 T_j 上的法曲率为

$$k_{ij} = \frac{2\langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2}$$

介绍了完了相关的基础知识, 接下来, 本文开始介绍三角网格曲面上各种离散曲率估计算法。

2 离散曲率估计方法总结

在前面已经提到三角网格上离散曲率估计的方法原理思想各不相同,有的利用四次 PDE 方法,有的利用 Laplace-Beltrami 算子,有的利用最小二乘法,有的利用 Vorono 元和有限元,有的利用张量分析和矩阵特征向量分析方法,有的利用 Normal cycle 理论计算曲面的第二基本形式等。这其中, Meyer 等的 Voronoi 方法对高斯曲率和平均曲率的估计效果最好,是一个普遍适用的好方法。下面我们就来总结概述一下。

2.1 Moreton 和 Sequin 的方法

这个方法主要是利用著名的欧拉定理,来建立曲面法曲率、曲面主曲率、主方向之间的关系。

最初,选定点 v_i 周围的三角形片的各法向量的平均值作为三角网格曲面在 v_i 处的法向量,记为 n 。过点 v_i 与 n 垂直的平面称为网格曲面在此点的切平面,设 t_j 为向量 $v_i v_j$ 在这个网格曲面的切平面上的单位投影。作过 v_i, v_j 且在点 v_i 有切向 t_j 的圆,则把曲面在点 v_i 处沿着 $v_i v_j$ 与方向的法曲率 \tilde{k}_j 近似地取为这个圆的半径的倒数,如图 2.1。

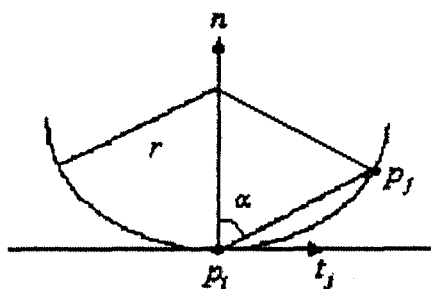


图 2.1

Fig.2.1

圆的半径公式可以由下面的公式求出,

$$\frac{n \cdot (v_j - v_i)}{\|v_j - v_i\|} = \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} \|v_j - v_i\|}{r}, \quad (2.1)$$

$$\text{这样, } \tilde{k}_j = 2 \frac{n \cdot (v_j - v_i)}{(v_j - v_i) \cdot (v_j - v_i)}. \quad (2.2)$$

设 a_x, a_y 为网格曲面上由 n 确定的切平面上的一组基, 取 t_{jx}, t_{jy} 为向量 t_j 关于基 a_x, a_y 的坐标, e_x, e_y 为主方向 e_1 关于此基的坐标。由欧拉定理, 有

$$\tilde{k}_j = \begin{pmatrix} t_{jx} \\ t_{jy} \end{pmatrix}^t \cdot K \cdot \begin{pmatrix} t_{jx} \\ t_{jy} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{其中, } K = \begin{pmatrix} e_x & e_y \\ -e_y & e_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\begin{pmatrix} e_x & e_y \\ -e_y & e_x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e_x & e_y \\ -e_y & e_x \end{pmatrix}}}$$

取 $i, j=1, 2, 3, \dots, m, m$ 为 p_i 的度, 上面的式子可以改写成方程组 $Ax = b$ 。

$$\text{其中, } A = \begin{pmatrix} t_{1x}t_{1x} & t_{1x}t_{1y} & t_{1y}t_{1y} \\ t_{2x}t_{2x} & t_{2x}t_{2y} & t_{2y}t_{2y} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{mx}t_{mx} & t_{mx}t_{my} & t_{my}t_{my} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \cdot \\ \tilde{k}_m \end{pmatrix}, \quad \text{和 } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^2 k_1 + e_y^2 k_2 \\ 2e_x e_y (k_1 - k_2) \\ e_x^2 k_2 + e_y^2 k_1 \end{pmatrix}。$$

由于 $x_0 + x_2 = e_x^2 k_1 + e_y^2 k_2 + e_x^2 k_2 + e_y^2 k_1 = k_1 + k_2, 2x_0 x_2 - \frac{x_1^2}{2} = k_1 k_2$, 所以就可以由上面的方程组来表示平均曲率和高斯曲率的值

$$k_H = \frac{x_0 + x_2}{2}, k_G = 2x_0 x_2 - \frac{x_1^2}{2}。$$

所以, 曲率估计就转化为了求解方程组 $Ax = b$, 可以使用最小二乘法的方法来求解,

$$x = \frac{1}{A^t A} \cdot A^t b \quad (2.4)$$

2.2 Chen 和 Schmitt 的方法

Chen 和 Schmitt 通过欧拉公式, 给出了一种估计算法。他们的主要思想是在局部切平面上选择合适的坐标系 $\{r_1, r_2\}$ 。由欧拉公式可得

$$k_{T_\theta} = k_1 \cos^2(\theta + \theta_0) + k_2 \sin^2(\theta + \theta_0) \quad (2.5)$$

θ_0 是选择的坐标系与主方向的夹角, 上式可重写为:

$$k_{T_\theta} = C_1 \cos^2(\theta) + C_2 \cos(\theta) \sin(\theta) + C_3 \sin^2(\theta) \quad (2.6)$$

C_1, C_2, C_3 是常数, θ 是切向量 T_θ 与第一坐标向量 r_1 的夹角。然后, 他们选择 $r_1 = T_{\theta_1}$, 通过最小二乘的方法估计常数 C_1, C_2, C_3 ,

$$\min \sum_j |C_1 \cos^2(\theta_{ij}) + C_2 \cos(\theta_{ij}) \sin(\theta_{ij}) + C_3 \sin^2(\theta_{ij}) - k_{ij}|^2$$

其中, θ_{ij} 是 r_1 与 T_{ij} 的夹角。

曲率 k_1, k_2 可以由常数 C_1, C_2, C_3 和下列关系求得

$$\begin{cases} k_1 \cos^2(\theta_0) + k_2 \sin^2(\theta_0) = C_1 \\ 2(k_2 - k_1) \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) = C_2 \\ k_2 \cos^2(\theta_0) + k_1 \sin^2(\theta_0) = C_3 \end{cases}$$

主方向可以由下列公式计算获得

$$\begin{cases} T_1 = \cos(-\theta_0)r_1 + \sin(-\theta_0)r_2 \\ T_2 = \sin(-\theta_0)r_1 + \cos(-\theta_0)r_2 \end{cases}$$

其中, $\{r_1, r_2\}$ 是选择的坐标系。

2.3 Taubin 主曲率主方向的方法

Taubin 主曲率主方向的方法利用张量分析和矩阵特征向量分析方法。这个方法一个突出优点就是时间和空间的线性。我们将在下一章和算法的改进同时介绍。

2.4 Desbrun 等方法

这个方法选择微分几何中的平均曲率流形的定义离散化,

$$\frac{\nabla A}{2A} = k_H n。$$

其中, A 为点 p 周围的 1-领域的面积, ∇ 为关于点 p 的坐标 (x, y, z) 的梯度算子。

现在来考虑三角片 $pp^n p^{n+1}$, 定义边 $pp^n = p^n - p$, A_n 为三角片 $pp^n p^{n+1}$ 的面积, 则

$A = \sum_n A_n$, 三角片的面积 $A_n = \frac{1}{2} \|pp^n \times pp^{n+1}\|$, 由 Einstein 求和公式, 有

$$A_n^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} pp_j^n \cdot pp_k^{n+1} \varepsilon_{ilm} pp_l^n \cdot pp_m^{n+1}。 \quad (2.7)$$

其中, ε_{ijk} 为排列符号, 使用 Kronecker 符号 δ_{ij} , 及由 $\frac{\partial p_i}{\partial p_q} = \delta_{iq}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial p_q}$, 这样可

以得

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n^2}{\partial p_q} &= 2A_n \frac{\partial A_n}{\partial p_q} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} [-\delta_{jq} pp_k^{n+1} \cdot pp_l^n \cdot pp_m^{n+1} - \delta_{kq} pp_j^n \cdot pp_l^n \cdot pp_m^{n+1} \\ &\quad - \delta_{iq} pp_j^n \cdot pp_k^{n+1} \cdot pp_m^{n+1} - \delta_{mq} pp_j^n \cdot pp_k^{n+1} pp_l^{n+1}] \end{aligned}$$

使用 $\varepsilon - \delta$ 规则, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{il}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i^2}{\partial p_q} &= \frac{1}{2} [-\|pp^{n+1}\|^2 pp^n + (pp^n \cdot pp^{n+1}) pp^{n+1} - \|pp^n\|^2 pp^{n+1} + (pp^{n+1} \cdot pp^n) pp^n]_q \\ &= \frac{1}{2} [(pp^{n+1} \cdot p^{n+1} p^n) pp^n + (pp^n \cdot p^n p^{n+1}) pp^{n+1}]_q \end{aligned}$$

最后, 可以得出

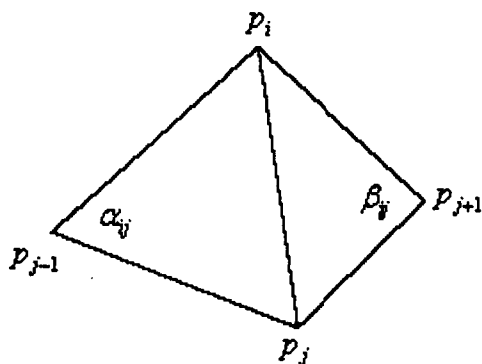
$$\frac{\partial A_i}{\partial p} = \frac{1}{4A_i} [(pp^{n+1} \cdot p^{n+1} p^n) pp^n + (pp^n \cdot p^n p^{n+1}) pp^{n+1}] \quad (2.8)$$

由梯度算子的定义, 可以知道

$$k_H \cdot n = \frac{\nabla A}{2A} = \frac{1}{2A} \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial p} \quad (2.9)$$

按如图 2.2 来定义 α_n , β_n , 平均曲率法向量可以表示为

$$k_H \cdot n = \frac{1}{4A} \sum (\cot \alpha_n + \cot \beta_n) pp^n \quad (2.10)$$



如图 2.2

Fig.2.2

2.5 Dyn 和 Hormann 的方法

在三角形网格中, 定义两端点为 p_i , p_j 的边 $e_j = p_j - p_i$, 两边 e_j , e_{j+1} 的夹角为 $\alpha_j = \angle(e_j, e_{j+1})$, 两边 $p_i p_j$, $p_j p_{j+1}$ 的夹角为 λ_j , 两边 $p_i p_{j+1}$, $p_j p_{j+1}$ 的夹角为 γ_j , 再记边 e_j , e_{j+1} 所围成的三角形 p_i , p_j , p_{j+1} 为 T_j , 其单位法向量为 $n_j = e_j \times e_{j+1} / \|e_j \times e_{j+1}\|$, 定义两个相邻面片 T_{j-1} , T_j 的法向量之间的夹角为 $\beta_j = \angle(n_{j-1}, n_j)$ 。

对具有公共边 e_j 的每两个三角形 T_{j-1} , T_j 作一个内切的小柱面, 这样整个三角网格曲面就由一系列小柱面拼成的光滑曲面来近似代替, 所以直接由微分几何中的定理可以得到离散高斯曲率和离散平均曲率的计算公式

$$K = \frac{2\pi - \sum_j \alpha_j}{A}, \quad |H| = \frac{1}{4A} \sum_{j=1}^n \|e_j\| |\beta_j| \quad (2.11)$$

其中, $A = \sum_i S_{p_i}$, S_{p_i} 如图 2.3 (p_i 为锐角), 图 2.4 (p_i 为钝角) 所示。

当 T_j 为锐角三角形时,

$$S_{p_i} = \left\{ \|p_i p_{j+1}\|^2 \cot \lambda_j + \|p_j p_{j+1}\|^2 \cot \gamma_j \right\}. \quad (2.12)$$

当 α_j 为钝角时,

$$S_{p_j} = \frac{1}{8} \|p_j p_{j+1}\|^2 \tan \lambda_j, \quad S_{p_{j+1}} = \frac{1}{8} \|p_i p_j\|^2 \tan \gamma_j, \quad (2.13)$$

$$S_{p_i} = S_{\Delta p_i p_j p_{j+1}} - S_{p_j} - S_{p_{j+1}}. \quad (2.14)$$

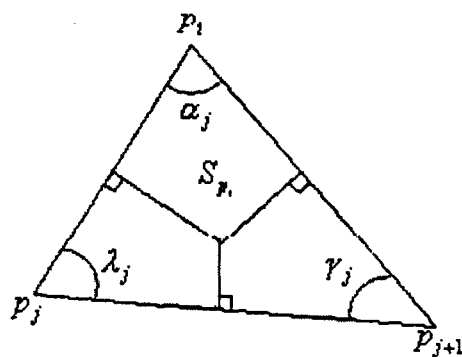


图 2.3

Fig.2.3

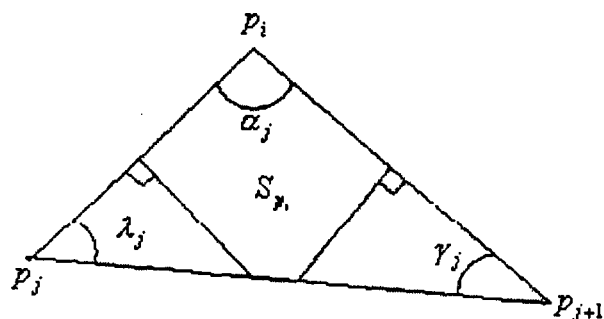


图 2.4

Fig.2.4

2.6 Watanabe 和 Belyaev 的方法

考虑一个可定向曲面, 根据欧拉公式, 可以推导出:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = (k_1 + k_2)/2 = k_H \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} k_H^2 - \frac{1}{2} k_G \quad (2.16)$$

其中, k_H 是平均曲率, 而 k_G 是 Gauss 曲率。这两个积分公式使我们可以三角网格曲面上估计 Gauss 曲率和平均曲率。考虑三角网格曲面上的某一点 p , 通过单位化与点 p 相邻三角面片法向量的加权和, 利用公式(1.16)可以估计点 p 处的法向量。利用公式(1.17)可以求出沿 1-环的每一条边在 p 点切平面投影方向的法曲率。下面, 我们来离散化积分公式(2.15)。

$$2\pi k_H = \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta \approx k_1 \left(\frac{\theta_1 + \theta_m}{2} \right) + k_2 \left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right) + \dots + k_m \left(\frac{\theta_{m-1} + \theta_m}{2} \right)$$

对公式(2.16)相似的离散方法, 可以估计出 Gauss 曲率。现在, 主曲率可以通过公式(1.7)和(1.8)计算得出。

2.7 Mayer 方法

该方法引入了 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta = Hn$ 和曲面的平均曲率流形, 对 Δ 求积分, 由微分几何中的 Green 公式得到:

$$\int_D \Delta f(x) dx = \int_{\partial D} \partial f(s) ds. \quad (2.17)$$

再把这个式子离散化, 把其中的 $\int_D \Delta f(x) dx$, $\partial f(s)$, ds 分别进行离散化为:

$$\Delta f(p_i) A(p_i), \frac{f(p_j) - f(p_i)}{\|p_j - p_i\|}, \frac{\|p_{j-1} - p_j\| + \|p_{j+1} - p_j\|}{2}$$

再取 $f(x) = x$ 就可以得到

$$D_M^{(2)} = \frac{1}{A(p_i)} \sum_{j \in D_1(i)} \frac{\|p_{j-1} - p_j\| + \|p_{j+1} - p_j\|}{2} \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} \quad (2.18)$$

2.8 Taubin 方法

该方法也是引入了 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta = Hn$ 和曲面的平均曲率流形, 然后对算子 Δ 进行离散化, 对网格表面上的点 p_i , 其 1-邻域的点集 $\{p_j, j \in N(i)\}$, 把 Δ 直接看作是其边的加权和,

$$\Delta = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (p_j - p_i). \quad (2.19)$$

其中, 权因子 w_{ij} 满足关系 $\sum_{j \in N(i)} w_{ij} = 1$, 其确定方法很多种, 最简单的可以直接取平均分布, 每个都相同,

$$w_{ij} = \frac{1}{|N(i)|}; \text{ 其中 } |N(i)| \text{ 为点 } p_i \text{ 的度.}$$

也可以按照点 p_i 周围的面积比或者是长度比来分布, 取权因子为

$$w_{ij} = \frac{\tau(p_i, p_j)}{\sum_{k \in N(i)} \tau(p_i, p_k)},$$

$\tau(p_i, p_j)$ 可以是边 $p_i p_j$ 所在的两个三角面片的面积和, 也可以是边 $p_i p_j$ 的长度的某个范数, 如 $\tau(p_i, p_j) = \|p_i - p_j\|^n$. 也可以取 $w_{ij} = \frac{1}{2}(\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})$, $\cot \alpha_{ij}, \cot \beta_{ij}$. 如图 2.2 所示.

2.9 Meyer 等的 Voronoi 方法

这个方法的基本思想是把光滑曲面看做是一族网格的极限或者线性逼近, 把三角网格每个顶点的度量性质看做是这个空间网格在此点一个小邻域的平均度量。

我们先来估计平均曲率, 由微分几何的平均曲率流形, 可知,

$$2k_H n = \lim_{diam(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A},$$

其中, A 为点 p 在曲面上的一个无穷小邻域, $diam(A)$ 为其直径, ∇ 为关于点 p 的梯度算子, 一般情况下, 也可以记 $K(p) = 2k_H(p)n(p)$, K 称为曲面 S 在点 p 上的 Laplace-Beltrami 算子。

现在来考虑 A 的取法, 一般可以取点 p 周围的 1-邻域。取法也可以稍有不同。对三角片分类讨论, 如图所示, 对于锐角三角形, 取三角形的外心连接每条边的中心, 得到

新的面积记为 $A_{锐}$ ，对于钝角三角形，把钝角对应边的中心和另外两条边的中心相连，得到面积记为 $A_{钝}$ ，对于任意的三角网格，则是用以后两种方法得到整个的混合面积 A_M 。

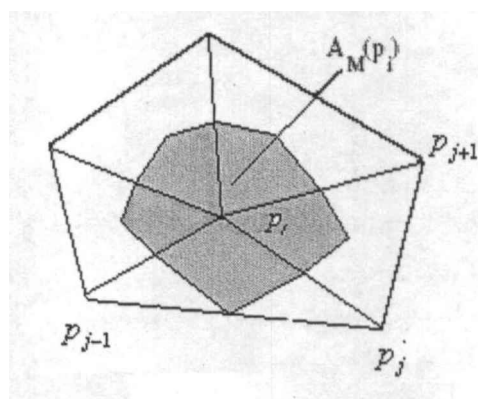


图 2.5

Fig.2.5

首先计算在 A_M 上的平均曲率法向的积分， $\iint_{A_M} K dA$ ，因为 Laplace-Beltrami 算子可以看作是拉普拉斯算子从平面空间到流形的一般化。首先计算保形参量 u, v 空间的拉普拉斯算子，所以可以用流形曲面来代替保形参量空间来计算，也就是，对网格上的每个三角片，三角片本身定义了局部曲面矩阵，对这样一个诱导矩阵，Laplace-Beltrami 算子可以直接转化为拉普拉斯算子 $\Delta_{u,v} p = p_{uu} + p_{vv}$ ，

$$\iint_{A_M} K(p) dA = \iint_{A_M} \Delta_{u,v} p du dv, \quad (2.20)$$

由 Gauss 定理，可以把上面的域上的积分转换成边界上的线积分，

$$\iint_{A_M} \Delta_{u,v} p du dv = \iint_{\partial A_M} \nabla_{u,v} p \cdot n_{u,v} dl, \quad (2.21)$$

由于考虑的是三角片，是分段线性的，则 $\nabla_{u,v} x$ 在每个三角片上都是一个常数。由于这个线积分是与路径无关的，所以不管如何取 A_M ，其表示都和直接连接两边中点的路径是一样的，如图 2.6。下面考虑图 2.7 中的三角片 $T = (x_i, x_j, x_k)$ ，可以计算线积分

$$\iint_{\partial A_M \cap T} \nabla_{u,v} p \cdot n_{u,v} dl = \nabla_{u,v} p \cdot [a-b]_{u,v}^\perp = \frac{1}{2} \nabla_{u,v} p \cdot [p_j - p_k]_{u,v}^\perp, \quad (2.22)$$

其中， \perp 为顺时针旋转 90 度。

由于函数 x 在任何三角片上都是线性的，用三角片的重心坐标作为基函数，得到

$$p = p_i B_i(u, v) + p_j B_j(u, v) + p_k B_k(u, v), \quad (2.23)$$

$$\nabla_{u,v} p = p_i \nabla_{u,v} B_i(u, v) + p_j \nabla_{u,v} B_j(u, v) + p_k \nabla_{u,v} B_k(u, v) \quad (2.24)$$

由于任何三角网格上三个基函数的梯度之和为 0，可以得到

$$\nabla_{u,v} p = \frac{1}{2A_T} \left[(p_j - p_i) [p_i - p_k]_{u,v}^\perp + (p_k - p_i) [p_j - p_i]_{u,v}^\perp \right] \quad (2.25)$$

则前面的积分可以表示为

$$\iint_{\partial A_M \cap T} \nabla_{u,v} p \cdot n_{u,v} dl = \frac{1}{4A_T} \left[([p_j - p_i] [p_j - p_k])_{u,v} (p_k - p_i) + ([p_i - p_k] [p_j - p_k])_{u,v} (p_k - p_i) \right]$$

再应用上面的面积定义，就可以求解得到

$$\iint_{\partial A_M \cap T} \nabla_{u,v} p \cdot n_{u,v} dl = \frac{1}{2} \left[\cot_{u,v} \angle(p_k) (p_i - p_j) + \cot_{u,v} \angle(p_j) (p_i - p_k) \right] \quad (2.26)$$

最后我们得到 Laplace-Beltrami 算子的积分

$$\iint_A K(p) dA = \frac{1}{2} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (p_j - p_i) \quad (2.27)$$

其中， $\cot \alpha_{ij}, \cot \beta_{ij}$ 如图 2.2 所示。

表示出点 p_i 上的平均曲率，为

$$k_H(p_i) = \frac{1}{4A_M} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \langle p_j - p_i, n \rangle \quad .$$

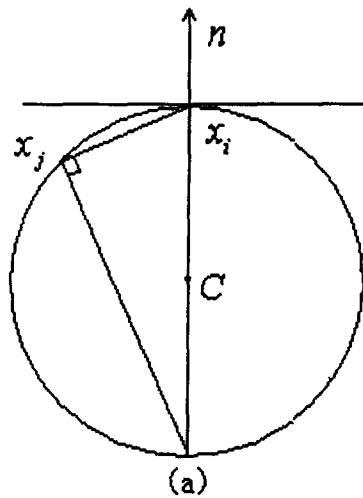


图 2.6
Fig.2.6

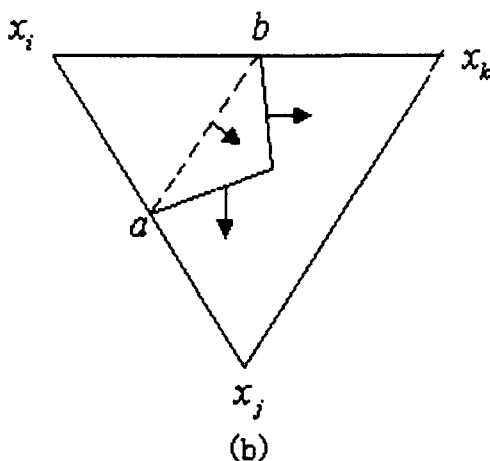


图 2.7

Fig.2.7

对于高斯曲率，可以直接从经典微分几何中的 Gauss-Bonnet 定理，

$$\iint_{A_M} K dA = 2\pi - \sum_j \theta_j$$

其中， θ_j 表示边 $p_i p_j$ 与 $p_i p_{j+1}$ 的夹角，对积分进行离散化，可以得到高斯曲率的离散形式为

$$k_G(p_i) = \frac{1}{A_M} (2\pi - \sum_{j \in N(i)} \theta_j) \quad (2.28)$$

对于主曲率，其离散形式可以截止由离散的高斯曲率和离散的平均曲率来求得

$$k_1(p_i) = k_H(p_i) + \sqrt{k_H^2(p_i) - k_G(p_i)} \quad (2.29)$$

$$k_2(p_i) = k_H(p_i) - \sqrt{k_H^2(p_i) - k_G(p_i)} \quad (2.30)$$

2.10 Cohen-Steiner 和 Morvan 的方法

对网络上每个顶点 p_i ，取点 p_i 周围的一个测地邻域 B ，其取法为所有满足到点 p_i 的测地距离小于等于给定的距离 r_i 的点，在算法的具体操作中，直接取以点 p_i 为球心，半径为 r_i 的球内所有的点，下面来考虑球内的点和边。

定义下面的矩阵

$$E_{p_i}(B) = \frac{1}{|B|} \sum_{e \in B} \beta(e) \|e \cap B\| \bar{e}^T \cdot \bar{e} \quad (2.31)$$

其中, $|B|$ 为 B 的面积 e 为 B 中网格的边, \bar{e} 为 e 方向上的单位向量, $\|e \cap B\|$ 为 $e \cap B$ 的长度, 在 0 和 $|e|$ 之间, $\beta(e)$ 是以 e 为公共边的两个三角形法向的夹角。

考虑上面矩阵的特征值和特征向量, $E_{p_i}(B)$ 的最小特征值的特征方向可以作为顶点 p_i 处网格曲面的法向量的估计式, 最小特征值和最大特征值可分别作为主曲率 k_1, k_2 的估计式, 于是平均曲率和高斯曲率就可以直接由主曲率依照微分几何的理论来得出

$$k_H = k_1 \cdot k_2, \quad k_H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

本章小节

前面已经提到, 在这些算法中, Meyer 等的 Voronoi 方法的计算精度是最高的。而 Taubin 主曲率主方向的方法具有运行速度快, 存储空间小的特点, 虽然其精度不如 Meyer 等的 Voronoi 方法, 但如果能对它进行改进提高精度, 它将是一个非常好的算法。在下面的介绍中, 就可以看到对它改进, 提高其计算精度是可行的。

3 Taubin 主曲率主方向的方法及其改进

3.1 Taubin 主曲率估计方法的主要思想介绍

对于曲面 S 上点 p , 设 $\{T_1, T_2\}$ 为其正交方向, 设 T 为点 p 上的单位切向量, $T = t_1 T_1 + t_2 T_2$, 这样可以表示出点 p 上沿着 T 方向的法曲率为

$$\tilde{k}_p(T) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} k_p^{11} & k_p^{12} \\ k_p^{21} & k_p^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

当 $k_p^{12} = k_p^{21} = 0$ 时, $\{T_1, T_2\}$ 为曲面 S 在点 p 的主方向, 相应的 k_p^{11} , k_p^{22} 为主曲率。

如果在上面的正交基中加入法向量 N , 就可以得到了三位的正交基 $\{N, T_1, T_2\}$, 这样上面的法曲率也可以表示成

$$\tilde{k}_p(T) = \begin{pmatrix} n \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p^1 & 0 \\ 0 & 0 & k_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

其中, $T = nN + t_1 T_1 + t_2 T_2$ 是任意向量。

引入 $-\pi \leq \theta \leq +\pi$, 则单位切向量 $T_\theta = T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta$, 这样法曲率可以表示为

$$k_p(T_\theta) = k_p^1 \cos^2 \theta + k_p^2 \sin^2 \theta, \quad (3.3)$$

其中, k_p^1, k_p^2 是 $\{T_1, T_2\}$ 方向上的主曲率; θ 是与主方向 T_1, T_2 的夹角。

定义如下对称矩阵:

$$M_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\theta) T_\theta T_\theta^t d\theta \quad (3.4)$$

由于 $T_\theta T_\theta^t$ 是秩为 1 的矩阵, 因此法向量 N 是该矩阵特征值为 0 时对应的特征向量。

然后将 M_p 分解

$$M_p = (T_1 \ T_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\theta) \cos^2 \theta d\theta & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\theta) \sin^2 \theta d\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

令 $T_{12} = (T_1 \ T_2)$ 由列向量 T_1 和 T_2 组成的 3×2 矩阵, 则可以重写上述矩阵

$$M_p = T_{12} \begin{pmatrix} m_p^{11} & m_p^{12} \\ m_p^{21} & m_p^{22} \end{pmatrix} T_{12}^t \quad (3.6)$$

其中, $m_p^{12} = m_p^{21} = 0$ 。

除了特征向量 N 之外, M_p 的另外两个特征向量是主方向 T_1 和 T_2 , 但其相应的特征值不是主曲率。

$$m_p^{11} = \frac{3}{8}k_p^1 + \frac{1}{8}k_p^2 \quad (3.7)$$

$$m_p^{22} = \frac{1}{8}k_p^1 + \frac{3}{8}k_p^2 \quad (3.8)$$

由上面的两个公式, 我们可以得出主曲率是对称矩阵 M_p 的非零特征值函数:

$$k_p^1 = 3m_p^{11} - m_p^{22} \quad (3.9)$$

$$k_p^2 = 3m_p^{22} - m_p^{11} \quad (3.10)$$

这样, 我们只要确定 M_p 中的 $\bar{k}_p(T_\theta)$, 就可以由 M_p 的特征向量和特征值来确定主曲率和主方向。对于单位切向量 T 的方向 $\bar{k}_p(T)$, 采用如下的估计式。

$$\bar{k}_p(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\langle N, \alpha(s) - p \rangle}{\|\alpha(s) - p\|^2} \quad (3.11)$$

这样, 对于三角网格上当前点 v_i , 点 v_j 是点 v_i 一环邻域上的一点, 沿着切方向 T_{ij} , 估计当前点 v_i 在方向 T_{ij} 上的法曲率为

$$k_{ij} = \frac{2\langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2} \quad (3.12)$$

3.2 Taubin 主曲率估计方法的计算步骤

第一步, 估计三角网格上每点的法向量。由于每个三角形面片 f_k 都定义的单位长度的法向量 N_{f_k} 。曲面是有方向的, 对与当前点 v_i 的法向量 N_{v_i} , Taubin 给出的面积加权 and 的定义:

$$N_{v_i} = \frac{\sum_{f_k \in F'} |f_k| N_{f_k}}{\left\| \sum_{f_k \in F'} |f_k| N_{f_k} \right\|} \quad (3.13)$$

第二步, 估计矩阵 M_{v_i} , 估计矩阵 M_{v_i} 为 1-环邻点的面积加权 and, 实际上, 是对上节积分矩阵 M_p 的离散化, 如下:

$$M_{v_i} = \sum_{v_j \in \nu'} \omega_{ij} k_{ij} T_{ij} T_{ij}^t \quad (3.14)$$

对于当前点 v_i 的每个 1-环邻点 v_j , 定义单位向量 T_{ij} 是向量 $\overline{v_j - v_i}$ 在切平面 $\langle N_{v_i} \rangle^\perp$ 上的投影,

$$T_{ij} = \frac{(I - N_{v_i} N_{v_i}^t) \overline{v_j - v_i}}{\|(I - N_{v_i} N_{v_i}^t) \overline{v_j - v_i}\|} \quad (3.14)$$

$$k_{v_i}(T_{ij}) \text{ 估计方法 } k_{ij} = \frac{2 \langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2}$$

权值 ω_j 仍然选择面积加权。

第三步, 对上述矩阵 M_{v_i} , 作 Householder 变换, 令 $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_{v_i} = \frac{E \pm N_{v_i}}{\|E \pm N_{v_i}\|}$

当 $\|E - N_{v_i}\| > \|E + N_{v_i}\|$ 符号取负, 反之符号取正。由此, 得到 Householder 矩阵为:

$$Q_{v_i} = I - 2W_{v_i} W_{v_i}^t,$$

是正交的并且第一列为 N_{v_i} 或 $-N_{v_i}$ (取决于前面的符号选择), 其余两列决定了切空间上一对标准正交基。

定义两个向量 \tilde{T}_1 和 \tilde{T}_2 , 由于 N_{v_i} 是矩阵 M_{v_i} 的特征值为 0 的特征向量, 则有:

$$Q_{v_i}^t M_{v_i} Q_{v_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{v_i}^{11} & \tilde{m}_{v_i}^{12} \\ 0 & \tilde{m}_{v_i}^{21} & \tilde{m}_{v_i}^{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \tilde{m}_{v_i}^{12} = \tilde{m}_{v_i}^{21}.$$

第四步, 使用 Givens 变换将矩阵 M_{v_i} 对角化, 获得角 θ 和该矩阵的特征值得到

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{v_i}^{11} \cos \theta + \tilde{m}_{v_i}^{21} \sin \theta & 0 \\ 0 & -\tilde{m}_{v_i}^{12} \sin \theta + \tilde{m}_{v_i}^{22} \cos \theta \end{pmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases} \tilde{m}_{v_i}^{11} \cos \theta + \tilde{m}_{v_i}^{21} \sin \theta = 0 \\ -\tilde{m}_{v_i}^{12} \sin \theta + \tilde{m}_{v_i}^{22} \cos \theta = 0 \end{cases}$, 可以求出 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$, 然后可以求出向量

$$T_1 = \cos \theta \tilde{T}_1 - \sin \theta \tilde{T}_2 \quad (3.15)$$

$$T_2 = \sin \theta \tilde{T}_1 + \cos \theta \tilde{T}_2 \quad (3.16)$$

这两个向量是矩阵 M_{v_i} 的特征向量, 即为曲面上点 v_i 处的主方向, 主曲率可由 $k_p^1 = 3m_p^{11} - m_p^{22}$, $k_p^2 = 3m_p^{22} - m_p^{11}$ 得出。

3.3 Taubin 主曲率估计方法的改进:

由 Taubin 主曲率估计方法的介绍中, 我们可以看到 Taubin 主曲率估计方法有几个重要的中间量, 正是这几个中间量的存在, 使得改进得以实现, 而改进也主要是改进这几个中间量。它们是法向量 N_{v_i} , 权值 ω_{ij} 。

3.3.1 法向量的改进

显然, 使用面积加权估计法向量的方法, 忽略了三角形片的形状, 例如图 2 所示, 当与顶点 v_i 邻接的两个三角片 f_{k_1} 与 f_{k_2} 具有相同的面积和法向量时, 如果用面积加权计算 v_i 的法向量, f_{k_1} 与 f_{k_2} 对 N_{v_i} 有相同的贡献。实际上, 从图 2 可知, f_{k_1} 与 f_{k_2} 的形状有着很大的差异。



图 3.1 与 v_i 邻接的面积与法向量相同、形状不同的三角片

Fig.3.1 Triangle adjacent to vertex v_i with same areas and normal vectors, but different sh

同样道理, 如果只使用质心或者面积夹角的估计方法, 也不能准确的反映三角形片形状的影响。所以为了更好更准确地反映三角形片的形状大小面积等因素, 本文提出了一种新的加权方法, 面积质心夹角的三角网格顶点向量法。即:

$$N_{v_i} = \frac{\sum_{f_k \in F^i} b_{ki} |f_k| N_{f_k}}{\left\| \sum_{f_k \in F^i} b_{ki} |f_k| N_{f_k} \right\|} \quad (3.17)$$

其中 r_k 为三角片 f_k 在顶点 v_i 处的内角, $g_k = \frac{\sum_{v_j \in f_k} v_j}{3}$ 为三角片 f_k 的质心,

$$b_{ki} = \frac{r_k}{\|g_k - v_i\|}。$$

3.3.2 权值的改进

由于面积权值也仅仅能反映三角片面积的影响, 所以本文将面积权值改为质心权值

$$w_{ij} = \frac{\sum_{f_k \in (F^i \cap F^j)} a_{ki}}{\sum_{v_h \in v^j} \sum_{f_k \in (F^i \cap F^j)} a_{ki}} \quad (3.18)$$

其中 $g_k = \frac{\sum_{v_j \in f_k} v_j}{3}$ 为三角片 f_k 的质心, $a_{ki} = \frac{1}{\|g_k - v_i\|^2}$ 。显然, 式定义的是权值与

质心到顶点 v_i 的距离成反比。这样可以反映三角形片面积和形状的综合影响。

4 实验

为了比较改进 Taubin 主曲率主方向方法的精度, 本文选取的实验模型分别为为: 椭球和环面。

本文定义高斯曲率误差为 $|\widehat{k}_G - k_G|$, 其中 k_G 为估算结果, \widehat{k}_G 为真实高斯曲率。平均曲率误差为 $|\widehat{k}_H - k_H|$, 其中 k_H 为估算结果, \widehat{k}_H 为真实平均曲率。为了更直观的反映改进的效果, 本文通过图像和表格来说明。其中, 对于图像横坐标为点序列, 纵坐标为误差值。并在表中列出了误差的最大和最小值。此外, 由于曲面的不同网格模型, 得到具体的误差也不同, 所以本文给出了曲面的三角网格模型。

在本章的最后, 本文还对实验误差进行了分析。

4.1 椭球

本文选取的椭球为: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1$ 。它的三角网格模型如图 4.1 所示。

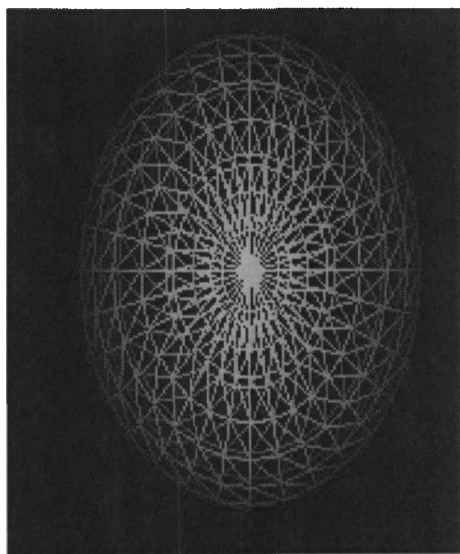


图 4.1 椭球的三角网格模型

Fig.4.1 The triangular mesh of ellipsoid

下面是椭球的实验误差图像和实验误差表格。从图像和表格中, 可以看出无论是高斯曲率还是平均曲率, 改进 Taubin 主曲率主方向方法的精度比原算法有了提高, 误差最大值和最小值都有所减小。

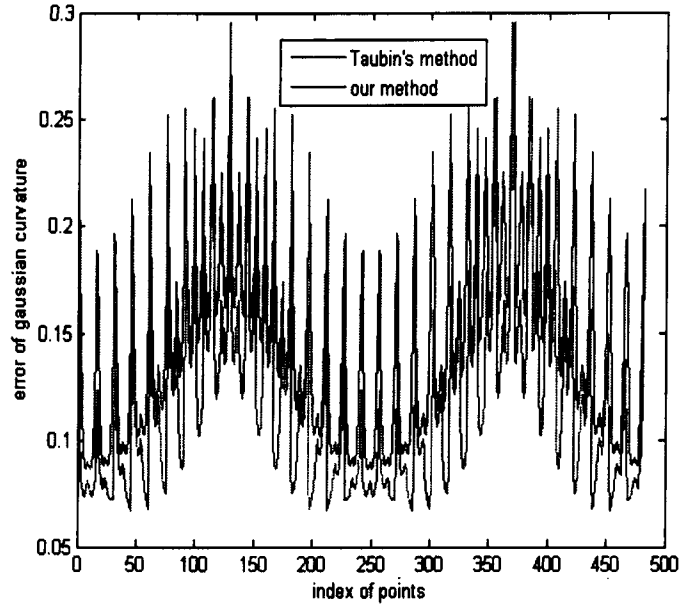


图 4.2 椭球的高斯曲率误差

Fig.4.2 The error of Gaussian curvature of ellipsoid

表 4.1 椭球的高斯曲率误差

Tab.4.1 The error of Gaussian curvature of ellipsoid

	最小值	最大值
Taubin 算法高斯曲率误差	0.0868	0.2955
改进 Taubin 算法高斯曲率误差	0.0669	0.2707

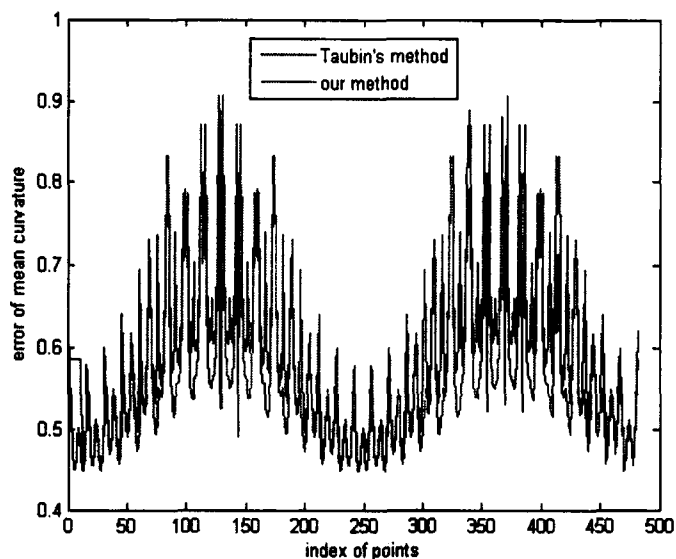


图4.3 椭球的平均曲率误差

Fig.4.3 The error of mean curvature of ellipsoid

表 4.2 椭球的平均曲率误差

Tab.4.2 The error of mean curvature of ellipsoid

	最小值	最大值
Taubin 算法平均曲率误差	0.4498	0.9064
改进 Taubin 算法平均曲率误差	0.4476	0.8817

4.2 环面

下面本文对环面进行高斯曲率和平均曲率误差测试。环面的参数方程为：

$$r(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u), \text{ 其中 } 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi。$$

由高斯曲率和平均曲率计算公式，环面的真实曲率值计算如下：高斯曲率为

$$k_G = \frac{\cos u}{r(r \cos u + a)}, \text{ 平均曲率为 } k_H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos u}{r \cos u + a} \right)。$$

它的三角网格模型如图 4.4 所示。

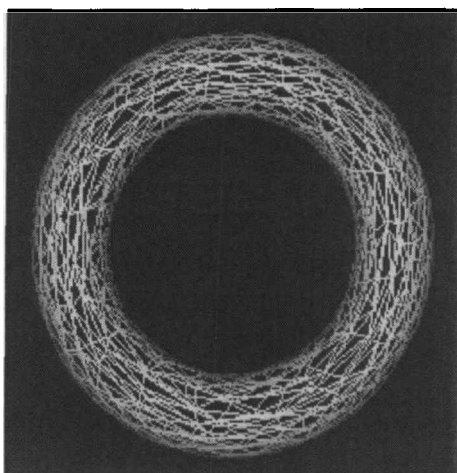


图 4.4 环面的三角网格模型

Fig.4.4 The triangular mesh of torus

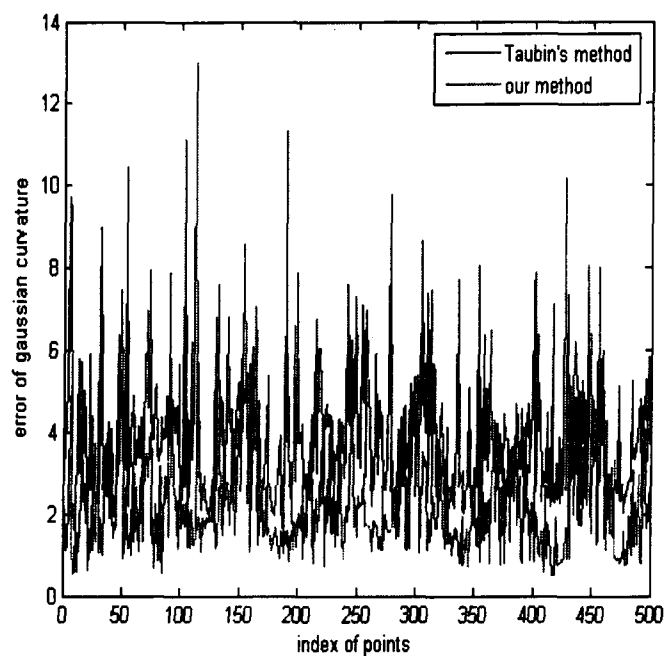


图 4.5 环面的高斯曲率误差

Fig.4.5 The error of Gaussian curvature of torus

表 4.3 环面的高斯曲率误差

Tab.4.3 The error of Gaussian curvature of torus

	最小值	最大值
Taubin 算法高斯曲率误差	1.0888	12.9899
改进 Taubin 算法高斯曲率误差	0.5177	5.9878

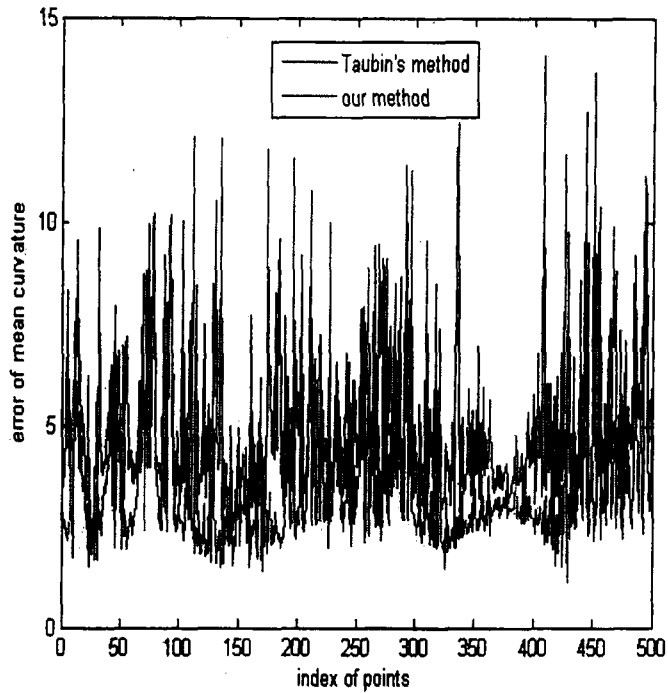


图 4.6 环面的平均误差

Fig.4.6 The error of mean curvature of torus

表 4.4 环面的平均误差

Tab.4.4 The error of mean curvature of torus

	最小值	最大值
Taubin 算法平均曲率误差	1.7187	14.0504
改进 Taubin 算法平均曲率误差	1.1051	9.8956

和椭球一样，从上面的图和表格可以看出，改进的算法无论是在高斯曲率还是在平均曲率上确实提高了算法的精度。同时在误差的最大和最小值也有所减小。同时也可以发现无论是椭球还是环面在某些点误差比较大，而某些点的误差比较小，下面本文就来分析其中的原因。

4.3 误差分析

法曲率 $k_{ij} = \frac{2\langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2} = \frac{2N_{v_i}}{\|v_j - v_i\|} \cdot \frac{v_j - v_i}{\|v_j - v_i\|} = \frac{2N_{v_i} v_{ij}}{\|v_j - v_i\|}$, 我们可以看出 N_{v_i}, v_{ij} 都是单位

向量, 所以 k_{ij} 的大小完全由 v_i, v_j 之间的距离 $\|v_j - v_i\|$ 所决定, $\|v_j - v_i\|$ 越大, k_{ij} 越小。

如果 p 和 q 之间的距离 $|q-p|$ 很小, 则曲面 S 在顶点 p 处沿 T_p 的法曲率就可以

$k_{ij} = \frac{2\langle N_{v_i}, \overline{v_j - v_i} \rangle}{\|v_j - v_i\|^2}$ 来近似代替 ($\bar{k}_p(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\langle N, \alpha(s) - p \rangle}{\|\alpha(s) - p\|^2}$)。

由极限理论可知, 两点越近, 近似代替极限的效果越好, 误差越小。所以最后可以得出, 由同一个物体的测量数据重建而得到的两个三角网格中, 顶点密度不同, 曲率计算也不同。顶点密度越大, 计算结果越精确。本文使用我们改进的方法, 对上述椭球网格加细, 重新计算曲率误差, 如图 4.7 所示, 得到高斯曲率最大误差为 0.1786。

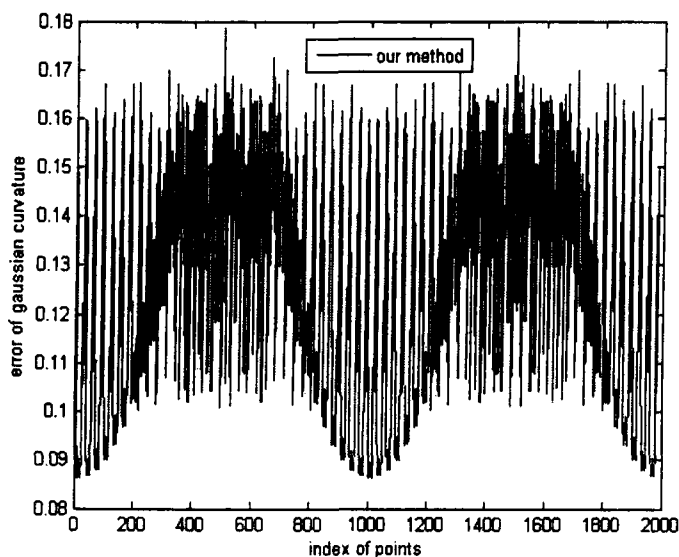


图 4.7 顶点密度对曲率的影响

Fig.4.7 Influence of vertex density on curvature

另外, 如果三角网格拓扑相同而曲面不同, 估计离散曲率相同, 则曲面弯曲越大, 真实曲率越大, 这样计算误差越大。如下图 4.8, 用我们的方法, 以椭球的高斯曲率误差为例, 在椭球长轴 2 个端点, 曲面的弯曲程度比较大, 则误差也比较大。此外, 本文对环面重新进行三角网格抛分 (三角网格拓扑相同), 见图 4.9, 使用本文改进的方法

计算高斯曲率，也得到类似的结果如图 4.10。这是因为环面上真实高斯曲率为

$$k_G = \frac{\cos u}{r(r \cos u + a)}, \text{ 所以在同一纬度是相同的。}$$

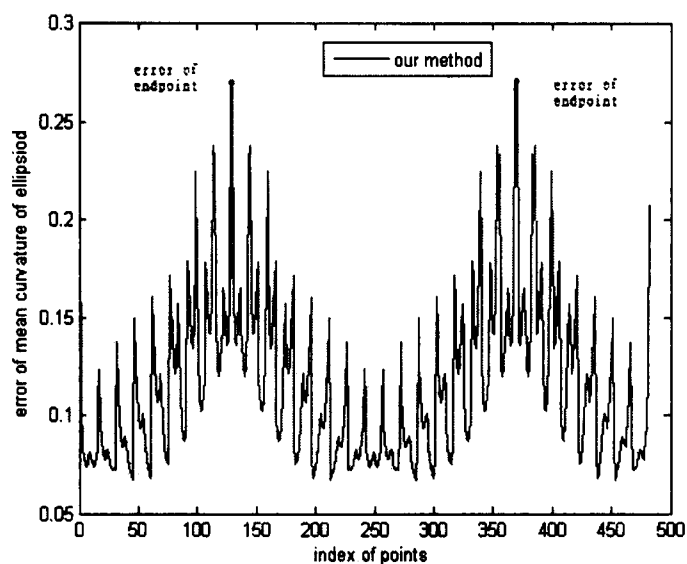


图 4.8 椭球长轴 2 个端点曲率误差最大

Fig.4.8 The best error of curvature of ellipsoid at at endpoints of prolate axis

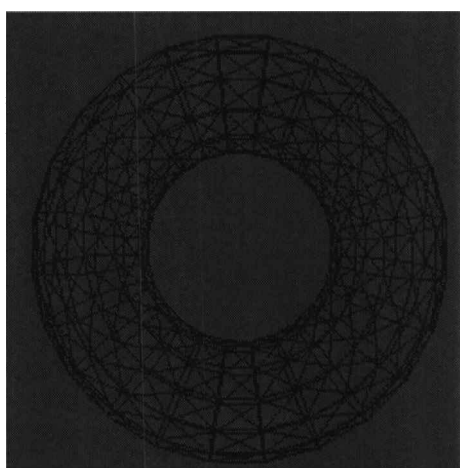


图 4.9 环面的三角网格模型

Fig.4.9 The triangular mesh of torus

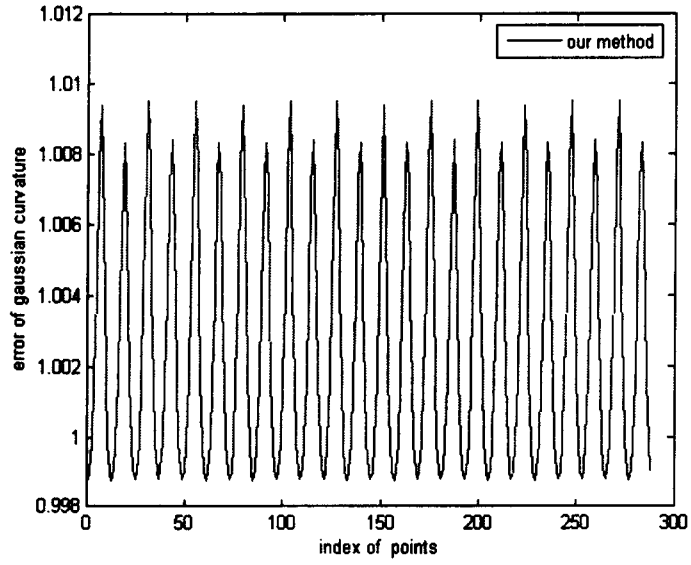


图 4.10 环面的高斯曲率误差

Fig.4.10 The error of Gaussian curvature of torus

结 论

Taubin 离散曲率估计方法中,有两个重要中间量,法向量和权值。本文采用了面积质心夹角的三角网格顶点向量法,不但弥补了面积加权的不足,相对于重心加权和面积夹角加权,还更加准确地反映了三角片形状的影响。同时使用了三角片质心权值。我们仍采用 Taubin 离散曲率估计方法的思想 and 计算步骤,选择椭球面和环面模型进行了实验。本文改进的 Taubin 方法无论在稳定性还是在精确度上,较原始 Taubin 方法都有明显改善。

最后本文还对误差进行了分析。由同一个物体的测量数据重建而得到的两个三角网格中,顶点密度不同,曲率计算也不同。顶点密度越大,计算结果越精确。如果三角网格相同而曲面不同,估计离散曲率相同,则曲面弯曲越大,真实曲率越大,这样计算误差越大。可以得出曲率误差是和点的密度以及此点的曲面弯曲程度是有密切关系的。误差分析,可以直接找出误差最大点,而不必计算每个点的曲率误差。对误差最大点进行分析,减小误差,提高算法精度。

如何给出更好的改进,进一步提高计算精度以及更好地对误差进行分析,将是日后工作的重点。

参 考 文 献

- [1] Warren J, Schaefer S, Hirani A N, Desbrun M. Barycentric coordinates for convex sets. Technical report, Rice University, 2003.
- [2] Taubin G. A signal processing approach to fair surface design. In: Proc. of the SIGGRAPH'95. New York: ACM Press, 1995. p. 351-358.
- [3] Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics[A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 1997. p. 209-216.
- [4] G. Lavoue, F. Dupont and A. Baskurt, Constant. Curvature Region Decomposition of 3D-Meshes by a Mixed. Approach Vertex-Triangle. Journal of WSCG, 2004, vol. 12, no. 2, p. 245-252.
- [5] Moreton H P , Sequin C H. Functional optimization for fair surface design [J]. In : Computer Graphics Proceedings , Annual Conference Series , ACM SIGGRAPH , Chicago , Illinois , 1992. 1167~1176.
- [6] Chen, X., Schmitt, F., 1992. Intrinsic Surface Properties from Surface Triangulation. Proceedings of the European Conference on Computer Vision, p. 739-743.
- [7] Taubin, G., 1995. Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision, p. 902-907.
- [8] Mayer U F1 Numerical solutions for the surface diffusion flow in three space dimensions [OL]. <http://www.mathluta.edu/~mayer/math/Mayer07.pdf> , 2001.
- [9] K. Watanabe and A. G Belyaev. Detection of salient curvature features on polygonal surfaces. In: EUROGRAPHICS 2001, volume 20, 2001.
- [10] Taubin G, Kobbelt L1 Geometric signal processing on large polygonal meshes [A]. In : Computer Graphics Proceedings , Annual Conference Series , ACM SIGGRAPH , Los Angeles , California , 2001. Course 17.
- [11] Dyn N, Hormann K, Kim S J, et al. Optimizing 3D triangulations using discrete curvature analysis. In: Applied Mathematics Series Archive Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Oslo, 2000. p. 135-146.
- [12] Cohen-Steiner D , Morvan J M. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle[A]. In : Proceedings of the 19th Conference on Computational Geometry , San Diego , California , 2003 , 53 : 312~321.
- [13] Meyer M, Desbrun M, Schroder P, Barr A H. Discrete differential geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: Visualization and Mathematics , Berlin , Germany, 2002, p. 52-58.

- [15]Gouraud, H., Continuous Shading of Curved Surfaces, IEEE Trans. on Computers, C-20(6), June, 1971 p.623-629.
- [16]Thurmer, G., Wuthrich, C., Computing Vertex Normals from Polygonal Facets, Journal of Graphics Tools, 3(1), 1998 p. 43-46.
- [17]Max, N., Weights for Computing Vertex Normals from Facet Normals, Journal of Graphics Tools, 4(2) 1999, p.1-6.
- [18]Sheng-Gwo Chen, Jyh-Yang Wu, 2004. Estimating normal vectors and curvatures by centroid weights. In: Computer Aided Geometric Design 21 (2004) p. 447 - 458.
- [19]Tatiana S, Evgeeny M, Octavian S, Gershon E, Ehud R. A comparison of Gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes. In: Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on.
- [20]Shuangshuang Jin, Robert R. Lewis, David West. A Comparison of Algorithms for Vertex Normal Computation. Washington State University, 2003.
- [21]彭家贵, 陈卿编著. 微分几何. 高等教育出版社, 2002.
- [22]Manferdo P. do Carmo 著, 田畴等译. 曲线与曲面的微分几何[M]. 北京:机械工业出版社, 2005.

攻读硕士学位期间发表学术论文情况

《三角网格上 Taubin 离散曲率估计方法及其改进》,属于学位论文第 3 章和第 4 章,齐宝明,刘秀平,大连理工大学研究生网络学刊,已录用。

致 谢

论文是在导师刘秀平教授的悉心指导下完成的。导师渊博的专业知识，严谨的治学态度，精益求精的工作作风，诲人不倦的高尚师德，严以律己、宽以待人的崇高风范，朴实无华、平易近人的人格魅力对我影响深远。不仅使我树立了远大的学术目标、掌握了基本的研究方法，还使我明白了许多待人接物与为人处世的道理。本论文从选题到完成，每一步都是在导师的指导下完成的，倾注了导师大量的心血。在此，谨向导师表示崇高的敬意和衷心的感谢！

感谢苏志勋，赵国辉教授在学习和研究过程对我的指导和帮助。感谢教研室同学的帮助。

特别是在两年的学习期间，得到温智捷，孙日明，郁博文，相超军，温维亮，曹明等师兄师姐和同学的关心和帮助，在此表示深深的感谢。没有他们的帮助和支持是没有办法完成我的论文的，同窗之间的友谊永远长存。

最后感谢我的家人和朋友对我长久以来的支持。没有他们，我将一事无成。

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名： 齐宝明

导师签名： 刘子云

2008 年 6 月 10 日