§2.2 曲面的第一基本形式

一、曲面上的曲线的弧长

二、曲面上两个切方向的交角

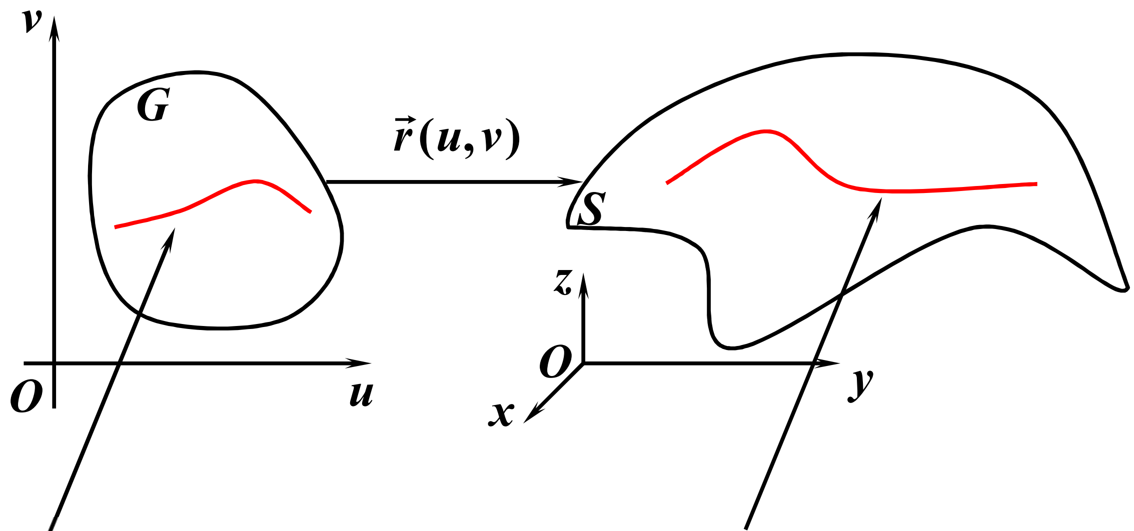
三、正交曲线族和正交轨线

四、曲面域的面积

五、等距变换

六、保角变换

曲面上的曲线



$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

曲面上的曲线 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

一、曲面上的曲线的弧长

曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，S上的曲线Γ：$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$,

$$\mathrm{d}s=\left|\vec{r}'(t)\right|\mathrm{d}t=\sqrt{\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\vec{r}_u\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

其中 $E(u,v)=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)$, $F(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v)$,

$G(u,v)=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)$

设 t_0, t_1 为 Γ 上的两点，则这两点间的弧长为：

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left[E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2$$

$$= E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$$

称 $\mathrm{I} = (\mathrm{d}s)^2 = E(u,v)\,\mathrm{d}u^2 + 2F(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(u,v)\,\mathrm{d}v^2$

为**曲面 S 的第一基本形式**. (即弧长微元的平方)

称系数 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ 为**曲面 S 的第一类基本量**.

$$\mathrm{I}=(\mathrm{d}s)^2=E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2$$

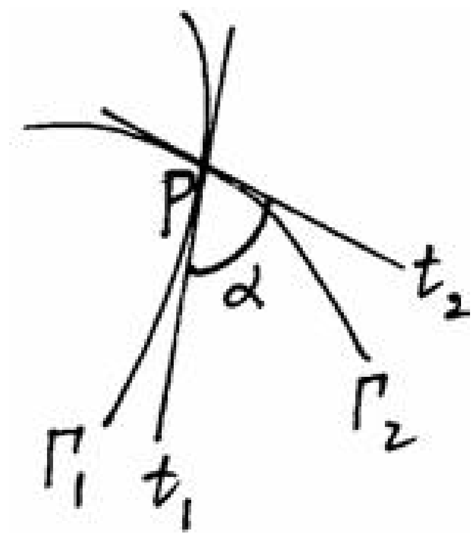
对正则曲面而言，I 是切平面上的一个正定的二次型.

定理： 曲面的第一基本形式与曲面的参数选取无关.

例P81-1

求双曲抛物面 $\vec{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),2uv)$ 的第一基本形式.

二、曲面上两个切方向的交角



曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$,

$$\mathrm{d}\vec{r}(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\vec{r}_v(u,v)\mathrm{d}v,$$

设曲面上有两个切方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$,

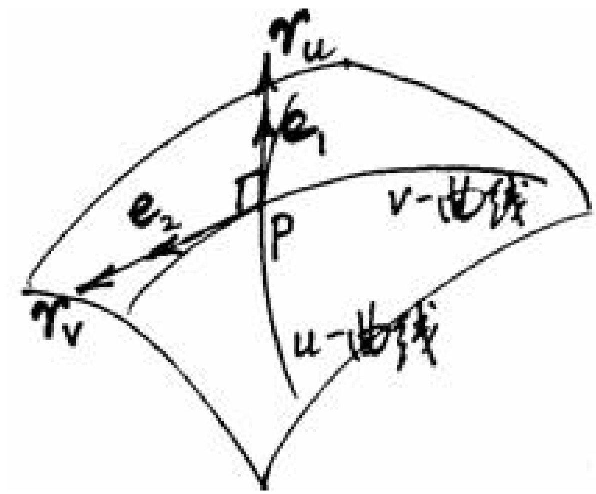
$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v,\quad \delta\vec{r}=\vec{r}_u\,\delta u+\vec{r}_v\,\delta v,$$

设交角为 α，则 $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cdot\left|\delta\vec{r}\right|\cdot\cos\alpha$,

$$\alpha=\arccos\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

定理 两个切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$垂直的充要条件是$E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0.$

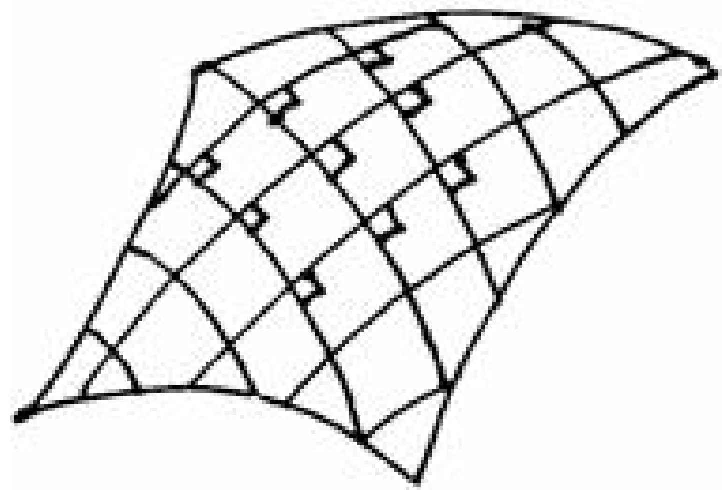
命题 曲纹坐标网为正交网的充要条件是$F(u,v)\equiv 0.$



例 P80-4

设曲面的第一基本形式为$(\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$，求它上面两条曲线$u+v=0$和$u-v=0$的交角.

三、正交曲线族和正交轨线



命题

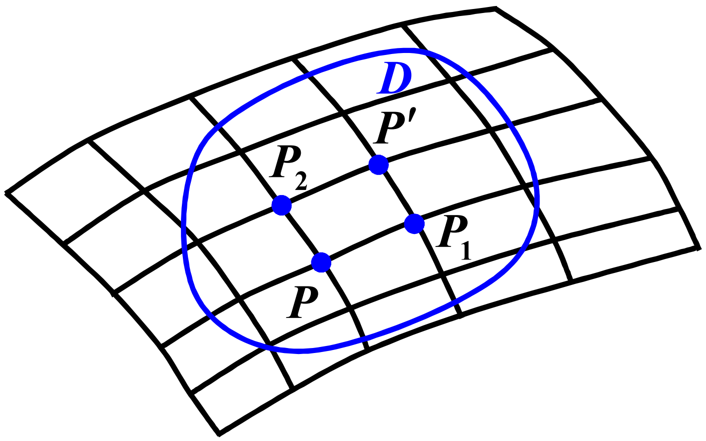
两曲线族 $A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0$ 和 $C\delta u+D\delta v=0$ 正交的充要条件是 $EBD-F(AD+BC)+GAC\equiv 0.$

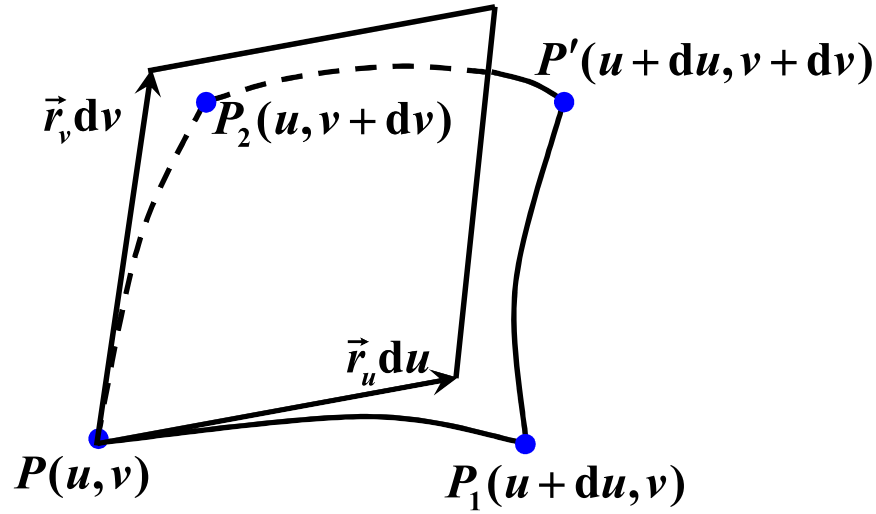
命题

曲线族 $A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0$ 的正交轨线族为

$$(BE-AF)\delta u+(BF-AG)\delta v=0.$$

四、曲面域的面积





设有曲面 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 曲面域 $D\subseteq S$, 求 D 的面积 σ_D.

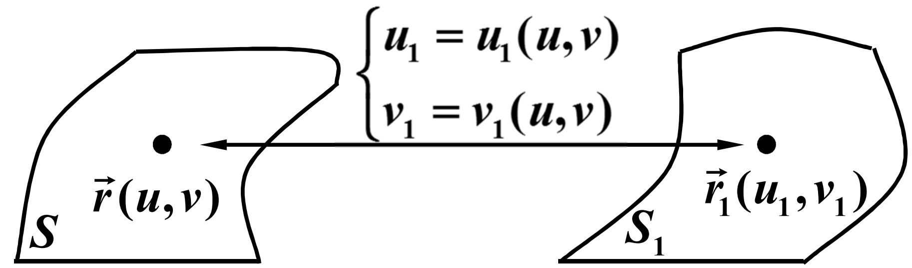
$$P(u,v),\quad P_1(u+\mathrm{d}u,v),\quad P'(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v),\quad P_2(u,v+\mathrm{d}v)$$

$$\left|\overset{\frown}{PP_1}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\approx\left|\vec{r}_u\mathrm{d}u\right|,\quad \left|\overset{\frown}{PP_2}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_2}\right|\approx\left|\vec{r}_v\mathrm{d}v\right|,$$

$$\mathrm{d}S=\left|(\vec{r}_u\mathrm{d}u)\times(\vec{r}_v\mathrm{d}v)\right|=\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\sigma_D=\iint\limits_{D'}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D'}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

五、等距变换(保长变换)



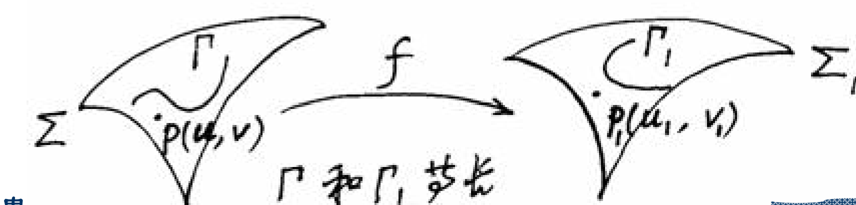
设曲面S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$和曲面S_1：$\vec{r}_1=\vec{r}_1(u_1,v_1)$之间存在一个一一对应关系，对应的点的参数之间有关系式：

$$\begin{cases} u_1 = u_1(u,v) \\ v_1 = v_1(u,v) \end{cases}$$

且$u_1(u,v), v_1(u,v)$有连续的偏导数，$\dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0.$

称这种一一对应为S到S_1的一个变换.

称曲面之间保持曲面上任意曲线的长度不变的变换为等距变换(保长变换).



可将 S_1 用与 S 相同的参数 u 和 v 来表示：

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u_1, v_1) = \vec{r}_1(u_1(u,v), v_1(u,v)) \triangleq \vec{r}_2(u,v)$$

则 S 上的点 (u,v) 对应于 S_1：$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(u,v)$ 上相同参数的点.

S 上的曲线 $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} (t \in I)$ 对应于 S_1：$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(u,v)$ 上的

曲线 $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} (t \in I)$.

这样会使得对应曲线在参数平面中具有相同的方程.

定理

两个曲面之间的一个变换是等距变换的充要条件是适当选择参数后它们具有相同的第一基本形式.

称仅由曲面的第一基本形式出发所能建立的几何性质为曲面的内在性质(内蕴性质).

称仅用曲面的第一类基本量表示出来的几何量为曲面的内蕴量.

曲面曲线的弧长, 曲面上两方向的交角, 曲面区域的面积都是曲面的内蕴量.

内蕴性质和内蕴量在等距变换下保持不变.

P78 请设计一个正螺面$\boldsymbol{r}=\{\boldsymbol{u}\cos\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\sin\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}\}$与悬链面$\boldsymbol{r}=\{\boldsymbol{a}\ \cosh\frac{t}{a}\cos\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a}\ \cosh\frac{t}{a}\sin\theta,t\}$之间的等距变换

六、保角变换(保形变换)

曲面之间保持曲面曲线的交角不变的变换.

定理

两个曲面之间的一个变换是保角变换的充要条件是适当选择参数后它们的第一基本形式成比例, 即

即 $\mathrm{I}_1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\lambda^2(u,v)\mathrm{I}(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 或写为

$$E_1(u,v):E(u,v)=F_1(u,v):F(u,v)=G_1(u,v):G(u,v).$$

每一个等距变换都是保角变换,

但保角变换一般不是等距变换.

(保角变换的条件比保长变换的条件弱很多)

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

P81： 2, 7, 11

补充作业题

2.2.1. 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = \cos^2 u\, du^2 + \sin^2 v dv^2$，它上面的三条曲线 $u+v=0, u-v=0$ 和 $v=1$ 围成一个曲边三角形，求

(1)该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2)该曲边三角形的三个内角;

(3)该曲边三角形的三条曲边的长度.

2.2.2. 改写曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ 的参数方程，使得它的曲纹坐标网成为正交网.

2.2.3. 请设计一个球面与圆柱面之间的保角变换.